UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

Teoría de productos cruzados trenzados

Tesis presentada para optar al título de Doctor de la Universidad de Buenos Aires en el área Ciencias Matemáticas

Mauricio da Rocha

Director de tesis: Juan José Guccione
Consejero de estudios: Juan José Guccione

Buenos Aires, 2014
Fecha de Defensa: 01/04/2015

Teoría de productos cruzados trenzados

Resumen

La noción de producto cruzado $A\#_f H$, de un álgebra de Hopf H con un álgebra A sobre la cual H actúa débilmente, y que esta provista de un cociclo normal $f\colon H \otimes H \longrightarrow A$, fue introducida independientemente en [**3**] y [**14**], generalizando la construcción clásica de producto cruzado de un grupo con un álgebra. Un caso importante es el de los productos semidirectos (productos cruzados $A\#H$, con cociclo trivial $f(h \otimes l) := \epsilon(h)\epsilon(l)$, asociados a una acción de H sobre A). Numerosos trabajos han sido dedicados al estudio de este concepto (vease el libro [**26**] y las referencias citadas ahí). En particular se sabe que si H es un álgebra de Hopf de dimensión finita, entonces existe un contexto Morita natural relacionando cada producto semidirecto $A\#H$ con el anillo ${}^H\!A$, de invariantes de la acción. En el trabajo [**18**] se extendieron al contexto trenzado las definiciones de producto cruzado (y en particular de producto semidirecto) dadas en [**3**] y [**14**], y se probó que en este contexto siguen valiendo muchos de los resultados bien conocidos en el caso clásico (en particular los relacionados con la existencia de un contexto Morita). En esta tesis estudiamos este contexto en detalle. Nuestro primer objetivo es determinar condiciones bajo las cuales las flechas que lo definen son sobreyectivas (lo que logramos, obteniendo además varias aplicaciones de estos resultados). Nuestro segundo objetivo es describir los productos cruzados de una familia de álgebras de Hopf trenzadas.

Palabras claves Álgebras de Hopf trenzadas, transposiciones, productos cruzados, contexto Morita, elementos de traza uno.

Theory of Braided Hopf Crossed Products

Abstract

The notion of crossed product $A\#_f H$, of a Hopf algebra H with an algebra A endowed with a weak action of H and a normal cocycle $f\colon H \otimes H \longrightarrow A$, was introduced independently in [**3**] and [**14**], is a generalization of the classical construction of a crossed product of a group with an algebra. An important case is the one of smash products (crossed products $A\#H$, with trivial cocycle $f(h \otimes l) := \epsilon(h)\epsilon(l)$, associated to an action of H on A). A lot of work were devoted to the study of this concept (see the book [**26**] and the references cited there). In particular it is known that if H is a finite dimensional Hopf algebra, then there exists a natural Morita context relating every smash products $A\#H$ with the invariants ring ${}^H A$. In the work [**18**] it was extended to the braided setting the definitions of crossed products (and in particular the definition smash product) given in [**3**] and [**14**], and it was proved that in this setting remain valid many of the well known results in the classical case (in particular those related with the existence of a Morita context). In this thesis we study this context in detail. Our first aim is to determine sufficient conditions in order that the arrows defining this contex are surjective (what we accomplished, besides getting several applications of these results). Our second aim is to describe the crossed product of a family of braided Hopf algebras.

Key words Braided Hopf algebras, transpositions, crossed products, Morita context, trace one elements.

Dedicado a
mi familia

Índice general

Prefacio

La noción de producto cruzado $A\#_f H$, de un álgebra de Hopf H con un álgebra A sobre la cual H actúa débilmente, y que esta provista de un cociclo normal $f\colon H \otimes H \longrightarrow A$, fue introducida independientemente en [**3**] y [**14**]. Esta construcción generaliza en forma directa la clásica de producto cruzado de un álgebra con un grupo que actúa sobre ella mediante automorfismos, y es lo suficientemente amplia para incluir como casos particulares a las álgebras de operadores diferenciales y a las álgebras graduadas sobre un grupo finito (estos son los ejemplos que se obtienen cuando el álgebra de Hopf es el álgebra envolvente de un álgebra de Lie y el álgebra dual de un álgebra de un grupo finito, respectivamente). Un caso particular muy importante es el de los productos semidirectos que, por definición, son los productos cruzados asociados a una acción de H sobre A y al cociclo trivial $f(h \otimes l) := \epsilon(h)\epsilon(l)$. Pero no son productos cruzados las extensiones de Ore, salvo las de tipo derivación. Por otra parte la definición es lo suficientemente fina como para que valgan en este contexto extensiones naturales de muchos resultados conocidos para productos cruzados de grupos con álgebras. Por ejemplo, se obtuvieron generalizaciones de:

- El Teorema de Maschke,
- Muchos resultados que relacionan propiedades del anillo de invariantes A^G, de un anillo A sobre el que actúa un grupo finito G, con propiedades del producto semidirecto $A\#k[G]$, siendo el más importante la existencia de un contexto Morita entre estas dos álgebras (un producto semidirecto es un producto cruzado con cociclo trivial $f(x \otimes y) = 1$ para todo $x, y \in G$),
- La caracterización de los productos cruzados como extensiones cleft y como extensiones normales de Galois,

Posteriormente, Brzeziński propuso en [**5**] una definición muy general de producto cruzado de un álgebra A con un espacio vectorial V, provisto de un punto distinguido 1_V. La definición dada por Brzeziński es muy general, y no es lo suficientemente fina como para que valgan resultados no formales. Sin embargo tiene la virtud de brindar un marco para la teoría de productos cruzados, debido a que incluye a cualquier generalización razonable de la definición dada en los trabajos mencionados antes, en la que el álgebra construída E sea asociativa y unitaria, el espacio vectorial subyacente a E sea el producto tensorial de un álgebra dada A y un espacio vectorial V provisto de un punto distinguido y alguna estructura extra, y el producto de E extienda al de A. Por "razonable" entendemos que incluya ejemplos interesantes que aparecen naturalmente en la teoría de grupos cuánticos y en la teoría de álgebras, y que tenga muchas de las propiedades que valen en el caso clásico.

En [**17**] se generalizó la noción de producto cruzado de un álgebra de Hopf H con un álgebra A, haciéndose depender la definición de un nuevo dato, además de los anteriores: una aplicación lineal

$$s\colon H \otimes A \longrightarrow A \otimes H,$$

llamada transposición de H sobre A, que es compatible con las estructuras algebraicas de H y A. Cuando s es el flip se recupera la definición clásica. Posteriormente, en [**18**] se consideró el caso en que H es un álgebra de Hopf trenzada, que es el contexto natural para este tipo de trabajos. Estas álgebras son casos particulares de productos cruzados de Brzeziński, y la construcción es lo suficientemente fina como para que los resultados mencionados arriba sigan siendo verdaderos (de hecho, lo son y, en particular, dada un álgebra de Hopf rígida que actúa sobre un álgebra dotada de una transposición, hay un contexto Morita entre el producto semidirecto construído a partir de estos datos y el anillo de invariantes). En la presente monografía continuamos esta investigación de la siguientes formas:

- Dada un álgebra de Hopf trenzada rígida H, consideramos el álgebra de Hopf trenzada $H^{\dagger} := H^{*\,\mathrm{op\,cop\,op\,cop}}$, y probamos que tener un H-comódulo a derecha es equivalente a tener un $H^{\dagger}$-módulo a izquierda, y que tener un H-comódulo álgebra a derecha es equivalente a tener un $H^{\dagger}$-módulo álgebra a izquierda (En [**31**, Proposition 2.7], se probó que esto no es cierto si se usa H^* en lugar de $H^{\dagger}$).
- Dado un producto semidirecto $A\#H$, donde H es rígida, encontramos condiciones para que una o ambas de las aplicaciones que definen el contexto Morita mencionado arriba sean sobreyectivas, y damos algunas aplicaciones.
- Introducimos una versión trenzada de las álgebras de Hopf introducidas en [**19**], y describimos sus productos cruzados.

Los resultados mencionados en los dos primeros ítems forman el trabajo [**10**], y los del tercer item forman la parte central de un trabajo que será enviado a publicar próximamente.

El trabajo está organizado como sigue. En el Capítulo 1 repasamos las nociones necesarias para leer esta tesis. Estas son la noción de producto cruzado de Brzeziński, algunos resultados de la teoría de álgebras de Hopf trenzadas y muy pocos resultados acerca de coeficientes q-binomiales. En el Capítulo 2 introducimos la definición de producto cruzado trenzado y establecemos muchas de sus propiedades. Los únicos resultados de esta sección que son nuevos son las fórmulas establecidas en el item 5) del Teorema 2.87. En el Capítulo 3 extendemos al contexto introducido en el Capítulo 2 la dualidad entre las nociones de H-comódulo a derecha y H^*-módulo a izquierda y entre las de H-comódulo álgebra a derecha y de H^*-módulo álgebra a izquierda válidas cuando H es una biálgebra de dimensión finita. También probamos que muchos de los resultados establecidos en [**8**] y [**7**], siguen valiendo en este contexto. Finalmente, en el Capítulo 4 describimos hasta donde podemos los productos cruzados de una familia de álgebras de Hopf trenzadas.

En esta tesis trabajamos en la categoría de espacios vectoriales sobre un cuerpo k. Por lo tanto asumimos implícitamente que todas las aplicaciones son k-lineales. El producto tensorial sobre k será denotado por $\otimes$, sin ningún subíndice. Dada una aplicación $f\colon U \to V$ y un espacio vectorial W, escribimos $U \otimes f$ en lugar de $\mathrm{id}_U \otimes f$ y $f \otimes U$ en lugar de $f \otimes \mathrm{id}_U$. Asumimos que el lector está familiarizado con las nociones de álgebra, coálgebra, módulo y comódulo. Salvo que lo contrario sea establecido explícitamente, asumimos que las álgebras son asociativas unitarias y que las coálgebras son coasociativas counitarias. Dadas un álgebra A y una coálgebra C, denotamos con

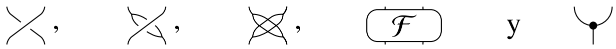
$$\mu\colon A\otimes A \longrightarrow A, \quad \eta\colon k \to A, \quad \Delta\colon C \longrightarrow C\otimes C \quad \text{y} \quad \epsilon\colon C \to k$$

a la multiplicación, la unidad, la comultiplicación y la counidad, especificadas con un subíndice, si es necesario. Además, dados espacios vectoriales V y W, denotamos con $\tau\colon V\otimes W \longrightarrow W\otimes V$ al flip $t(v\otimes w) := w\otimes v$.

Algunos de los resultados de esta tesis valen en el contexto de categorías monoidales. En realidad en muchas partes de esta monografía usamos el hoy en dia bien conocido cálculo gráfico para categorías monoidales y trenzadas. Como es usual, los morfismos serán compuestos de arriba hacia abajo y los productos tensoriales serán representados mediante la concatenación horizontal en el orden correspondiente. La aplicación identidad de un espacio vectorial será representada por una linea vertical. Dada un álgebra A, los diagramas

representan a la multiplicación, la unidad, la acción de A sobre un A-módulo a izquierda y la acción de A sobre un A-módulo a derecha, respectivamente, y dada una coálgebra C, los diagramas

representan a la comultiplicación, la counidad y la coacción de C sobre un C-comódulo a derecha (en este trabajo los comódulos a izquierda sólo aparecen una vez, y meramente para señalar su existencia). Las aplicaciones c (introducida en la Definición 1.8), s (introducida al comienzo de la Subsección 1.1 para espacios vectoriales y en la Definición 2.2 para álgebras), χ, $\mathcal{F}$ (introducidas al comienzo de la Sección 1) y f (Introducida al comienzo de la Sección 6), serán representadas por los diagramas



respectivamente. Las funciones inversas de c y s serán representadas por

Cuando f sea inversible bajo convolución su inversa será representada gráficamente por el diagrama

Finalmente, una aplicación arbitraria $g\colon V \to W$ será representada por el diagrama

No obstante estos comentarios, si lo consideramos conveniente haremos aclaraciones adicionales.

Sean V y W espacios vectoriales y sea $c\colon V \otimes W \longrightarrow W \otimes V$ una aplicación:

- Si V es un álgebra, entonces decimos que *c es compatible con la estructura de álgebra de V* si

$$c \circ (\eta \otimes W) = W \otimes \eta \qquad \text{y} \qquad c \circ (\mu \otimes W) = (W \otimes \mu) \circ (c \otimes V) \circ (V \otimes c).$$

- Si V es una coálgebra, entoces decimos que *c es compatible la estructura de coálgebra de V* si

$$(W \otimes \epsilon) \circ c = \epsilon \otimes W \qquad \text{y} \qquad (W \otimes \Delta) \circ c = (c \otimes V) \circ (V \otimes c) \circ (\Delta \otimes W).$$

Por supuesto, hay nociones de compatibilidad similares cuando W es un álgebra o una coálgebra.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo hacemos un repaso rápido de las nociones necesarias para leer esta tesis, limitándonos, salvo quizás por alguna excepción menor, a recordar las propiedades que usaremos en los capítulos siguientes. En la primera sección revisamos el concepto de producto cruzado de Brzeziński y las características fundamentales de estos objetos. Esta construcción tiene la virtud de brindar un marco para la teoría de productos cruzados, debido a que incluye a cualquier generalización razonable de la definición clásica de producto cruzado de un álgebra por un grupo en la que el álgebra construída sea asociativa y unitaria, su espacio vectorial subyacente sea el producto tensorial del álgebra dada y un espacio vectorial provisto de un punto distinguido y alguna estructura extra, y su producto extienda al del álgebra. En la segunda recordamos sin pruebas los rudimentos más básicos de la teoría de Álgebras de Hopf trenzadas, siguiendo la presentación intrínseca introducida por Takeuchi. En particular revisamos las relaciones de la antípoda con la multiplicación, la comultiplicación, la unidad y la counidad, y recordamos la definición de álgebra de Hopf trenzada rígida, repasando algunas de sus propiedades más importantes. Entre otras, establecemos la existencia y las propiedades fundamentales de las integrales a izquierda y a derecha, damos la construcción de la biálgebra trenzada dual de una biálgebra trenzada rígida, y damos una caracterización sencilla de las álgebras de Hopf trenzadas semisimples. Por último, en la Sección 3 recordamos la definición y algunas de las propiedades de los coeficientes binomiales gaussianos. Los resultados de esta sección no serán necesarios hasta el Capítulo 4.

1. Productos cruzados de Brzeziński

En esta sección recordamos una definición muy general de producto cruzado introducida en [**5**], y establecemos sus propiedades básicas. Consideremos un álgebra unitaria A y un espacio vectorial V provisto de un elemento distinguido $1_V \in V$ (que escribiremos como 1 si no hay posibilidad de confusión). Dadas aplicaciones

$$\chi\colon V\otimes A \longrightarrow A\otimes V \qquad \text{y} \qquad \mathcal{F}\colon V\otimes V \longrightarrow A\otimes V,$$

denotamos con $A\#V$ al álgebra (en general no asociativa ni unitaria) cuyo espacio vectorial subyacente es $A\otimes V$ y cuya multiplicación es dada por

$$\mu_{A\#V} := (\mu\otimes V)\circ(\mu\otimes\mathcal{F})\circ(A\otimes\chi\otimes V).$$

Los elementos $a \otimes v$ de $A\#V$ usualmente serán escritos $a\#v$.

Definición 1.1. *Decimos que el álgebra $A\#V$ es el* producto cruzado de A con V asociado al par $(\chi, \mathcal{F})$ *si es asociativa con identidad* $1\#1$.

Definición 1.2. *Consideremos funciones* $\chi\colon V \otimes A \longrightarrow A \otimes V$ *y* $\mathcal{F}\colon V \otimes V \longrightarrow A \otimes V$.

1. χ *es una* aplicación de torcimiento *si es compatible con la estructura de álgebra de A y* $\chi(1 \otimes a) = a \otimes 1$.
2. $\mathcal{F}$ *es* normal *si* $\mathcal{F}(1 \otimes v) = \mathcal{F}(v \otimes 1) = 1 \otimes v$, *y es un* cociclo *que satisface la* condición de módulo torcido *si valen las igualdades planteadas en la Figura 1. Más precisamente, la*

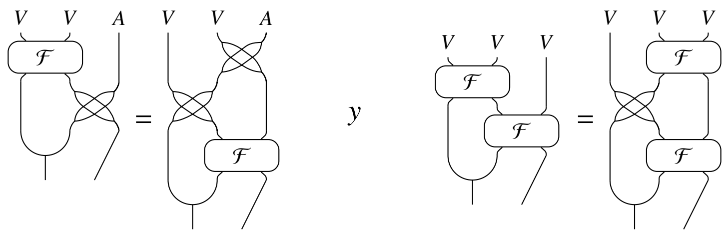


Figura 1. Condiciones de cociclo y de módulo torcido

primera igualdad dice que $\mathcal{F}$ es un cociclo, y la segunda dice que satisface la condición de módulo torcido.

Teorema 1.3 (T. Brzeziński). *Si χ es una aplicación de torcimiento y $\mathcal{F}$ es un cociclo normal que satisface la condición de módulo torcido, entonces el álgebra $A\#V$ es un producto cruzado.*

Demostración. Es fácil verificar que $1\#1$ es la unidad, y la Figura 2, donde la primera igualdad

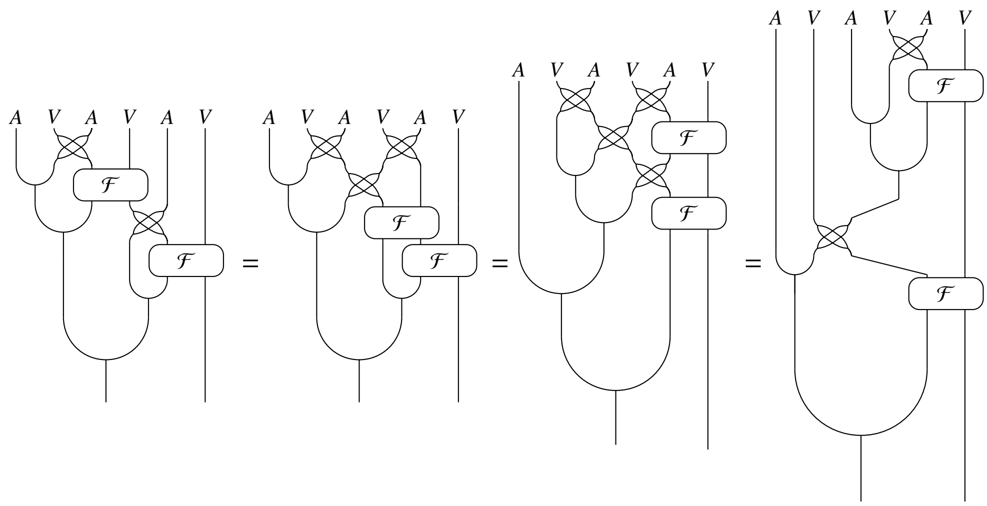


Figura 2

es cierta por la condición de cociclo, la segunda por la condición de módulo torcido y la tercera por la compatibilidad de χ con μ, prueba que la multiplicación es asociativa. □

Obsérvese que la multiplicación de un producto cruzado satisface:

$$\mu_{A\#V}(a\#1 \otimes b\#v) = ab\#v. \tag{1.1}$$

Una comprobación sencilla muestra que cada producto asociativo que satisface (1.1) es la multiplicación de un producto cruzado. La aplicación de torcimiento χ y el cociclo $\mathcal{F}$ están dados por

$$\chi(v \otimes a) = (1 \otimes v)(a \otimes 1) \qquad \text{y} \qquad \mathcal{F}(v \otimes w) = (1 \otimes v)(1 \otimes w).$$

A continuación mencionaremos algunos otros resultados:

Proposición 1.4. *Sean $A\#V$ un producto cruzado y B un álgebra. Dados un morfismo de álgebras $\alpha\colon A \to B$ y una aplicación $\beta\colon V \to B$ tal que*

1. *$\beta(1) = 1$,*
2. *$\mu(\alpha \otimes \beta) \circ \chi = \mu \circ (\beta \otimes \alpha)$,*
3. *$\mu \circ (\alpha \otimes \beta) \circ \mathcal{F} = \mu \circ (\beta \otimes \beta)$,*

hay un único morfismo de álgebras $\gamma\colon A\#V \to B$ que satisface

$$\gamma(a\#1) = \alpha(a) \qquad y \qquad \gamma(1\#v) = \beta(v).$$

Recíprocamente, si $\gamma\colon A\#V \to B$ es un morfismo de álgebras, entonces las aplicaciones

$$\alpha\colon A \to B \quad y \quad \beta\colon V \to B,$$

definidas por $\alpha(a) := \gamma(a\#1)$ y $\beta(v) := \gamma(1\#v)$ respectivamente, satisfacen las condiciones requeridas en los items (1)–(3).

Demostración. Suponiendo que valen las condiciones (1)–(3), definimos $\gamma\colon A\#V \to B$ por $\gamma(a\#v) = \alpha(a)\beta(v)$. Entonces

$$\gamma(1\#1) = \alpha(1)\beta(1) = 1,$$

y la Figura 3 muestra que la aplicación γ es un morfismo de álgebras, siendo evidentemente el

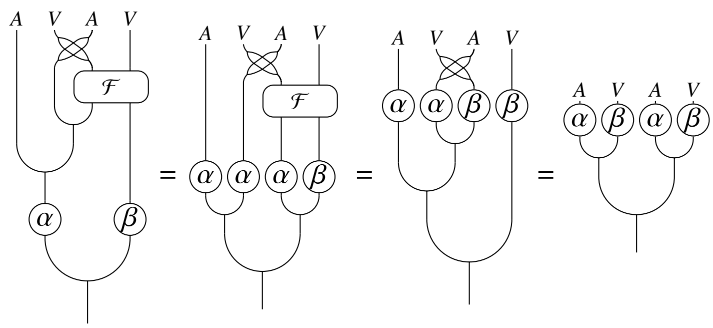


Figura 3

único tal que $\gamma(a\#1) = \alpha(a)$ y $\gamma(1\#v) = \beta(v)$.

Recíprocamente, si $\gamma\colon A\#V \to B$ es un morfismo de álgebras, entonces la condición (1) se satisface, porque

$$1 = \gamma(1\#1) = \alpha(1)\beta(1) = \beta(1).$$

Además, para todo $a \in A, v, w \in V$,

$$\beta(v)\alpha(a) = \gamma(1\#v)\gamma(a\#1) = \gamma((1\#v)(a\#1)) = \gamma(\chi(v \otimes a)) = (\mu \circ (\alpha \otimes \beta) \circ \chi)(v \otimes a)$$

y

$$\beta(v)\beta(w) = \gamma(1 \otimes v)\gamma(1 \otimes w) = \gamma((1 \otimes v)(1 \otimes w)) = \gamma(\mathcal{F}(u \otimes v)) = (\mu \circ (\alpha \otimes \beta) \circ \mathcal{F})(v \otimes w),$$

lo que prueba que se satisfacen las condiciones (2) y (3). □

Proposición 1.5. *Un álgebra B es isomorfa a un producto cruzado $A\#V$ si y sólo si existen aplicaciones*

$$A \xrightarrow{\alpha} B \xleftarrow{\beta} V$$

tales que α es un morfismo de álgebras, $\beta(1) = 1$ y $\mu \circ (\alpha \otimes \beta) \colon A \otimes V \to B$ es un isomorfismo de espacios vectoriales.

Demostración. Si existe un isomorfismo de álgebras $\gamma \colon A\#V \to B$, entonces por la Proposición 1.4 existen $\alpha \colon A \to B, \beta \colon V \to B$ tales que α es un morfismo de álgebras, $\beta(1)$ y $\mu \circ (\alpha \otimes \beta) = \gamma$, por lo que $\mu \circ (\alpha \otimes \beta)$ es un isomorfismo de espacios vectoriales.

Recíprocamente, si existen $\alpha \colon A \to B, \beta \colon V \to B$ que cumplen las condiciones establecidas en el enunciado, entonces la Figura 4 prueba que el producto cruzado $A\#V$, con aplicación de

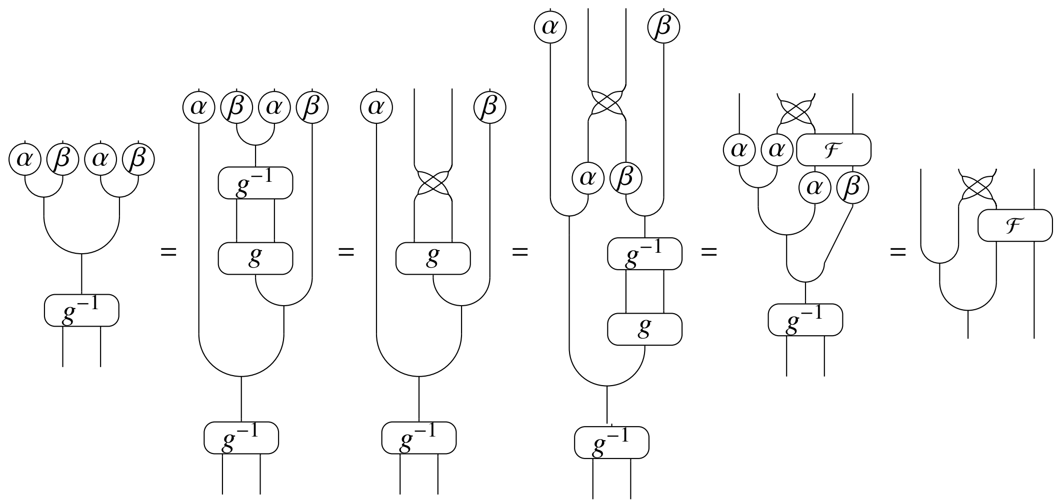


Figura 4

torcimiento

$$\chi(v \otimes a) = (g^{-1} \circ \mu_B \circ (\beta \otimes \alpha))(v \otimes a)$$

y cociclo

$$\mathcal{F}(v \otimes w) = (g^{-1} \circ \mu_B \circ (\beta \otimes \beta))(v \otimes w),$$

es un álgebra isomorfa a B. □

Ejemplo 1.6 (Productos tensoriales torcidos). *Sean B un álgebra, $\chi \colon B \otimes A \to A \otimes B$ una aplicación de torcimiento y $\mathcal{F} \colon B \otimes B \to A \otimes B$ el* cociclo trivial $\mathcal{F}(v \otimes v') = 1 \otimes vv'$. *Es evidente que $\mathcal{F}$ es normal y satisface la condición de cociclo. Además, la condición de módulo torcido se reduce a la condición*

$$(A \otimes \mu) \circ (\chi \otimes B) \circ (B \otimes \chi) = \chi \circ (\mu \otimes A).$$

Luego χ es una aplicación de torcimiento en el sentido de [**6**] *y (B, A, χ) es un par apareado de álgebras. Los productos cruzados $A \otimes_\chi B$ construidos con este tipo de datos se llaman* productos tensoriales torcidos *o* productos apareados. *Estas álgebras, que son una generalización directa de los productos tensoriales, fueron estudiadas en* [**6**] *y* [**29**].

Terminaremos esta sección introduciendo una definición que se necesitará más adelante:

Definición 1.7. *Sea $\chi \colon V \otimes A \to A \otimes V$ una aplicación de torcimiento. Una subálgebra A' de A es estable por χ si $\chi(V \otimes A') \subseteq A' \otimes V$.*

2. Biálgebras trenzadas y Álgebras de Hopf trenzadas

En esta sección haremos una revisión rápida de los conceptos de biálgebra trenzada y álgebra de Hopf trenzada siguiendo la presentación dada en [**30**]. Recordemos que por definición, un *operador de trenzas* de un espacio vectorial V es una función lineal $c\colon V\otimes V \longrightarrow V\otimes V$ tal que

$$(c\otimes V)\circ(V\otimes c)\circ(c\otimes V)=(V\otimes c)\circ(c\otimes V)\circ(V\otimes c).$$

En este caso decimos también que c es una solución de la ecuación de trenzas.

Definición 1.8. *Una* biálgebra trenzada *es un espacio vectorial H, provisto con una estructura de álgebra, una estructura de coálgebra y un operador biyectivo de Yang Baxter $c\in \mathrm{End}_k(H^2)$ (llamado la trenza de H) tal que c es compatible con las estructuras de álgebra y coálgebra de H, η es un morfismo de coálgebras, ϵ es un morfismo de álgebras y*

$$\Delta\circ\mu=(\mu\otimes\mu)\circ(H\otimes c\otimes H)\circ(\Delta\otimes\Delta).$$

Si además existe una aplicación $S\colon H\to H$ que es la inversa de la identidad en el monoide $\mathrm{Hom}_k(H,H)$ *con el producto de convolución, entonces decimos que H es un* álgebra de Hopf trenzada *y llamamos a S la* antípoda *de H.*

Usualmente H denotará a una biálgebra trenzada con las aplicaciones de estructura sobreentendidas, y c denota a su trenza. Si es necesario, utilizaremos notaciones aclaratorias como c_H, μ_H, etcétera.

Observación 1.9. *Asumamos que H es un álgebra y una coálgebra y $c\in\mathrm{Aut}(H^2)$ es una solución de la ecuación de Yang Baxter, que es compatible con las estructuras de álgebra y coálgebra. Entonces H es una biálgebra trenzada con trenza c si y solo si $\Delta\colon H\to H\otimes_c H$ y $\epsilon\colon H\to k$ son morfismos de álgebras.*

Definición 1.10. *Sean H y L biálgebras trenzadas. Una aplicación $g\colon H\to L$ es un* morfismo de biálgebras trenzadas *si es un morfismo de álgebras y de coálgebras y $c\circ(g\otimes g)=(g\otimes g)\circ c$.*

Sea H un álgebra de Hopf trenzada. En [**30**, Proposición 5.5] Se probó que c conmuta con S (esto es, que $c\circ(S\otimes H)=(H\otimes S)\circ c$ y $c\circ(H\otimes S)=(S\otimes H)\circ c$). Además, también es cierto que

$$S\circ\eta=\eta,\quad S\circ\mu=\mu\circ(S\otimes S)\circ c,\quad \epsilon\circ S=\epsilon\quad \text{y}\quad \Delta\circ S=c\circ(S\otimes S)\circ\Delta.$$

Finalmente, si L es otra álgebra de Hopf trenzada y $g\colon H\to L$ es un morfismo de biálgebras, entonces $g\circ S=S\circ g$.

Ejemplo 1.11. *Sean V un espacio vectorial, $c\colon V\otimes V\to V\otimes V$ un operador de Yang Baxter biyectivo y $T(V)$ el álgebra tensorial de V. Es claro que existe un único operador de Yang Baxter*

$$c\colon T(V)\otimes T(V)\longrightarrow T(V)\otimes T(V)$$

que extiende a c y es compatible con la estructura de álgebra de $T(V)$. Por la propiedad universal de $T(V)$, existen morfismos de álgebras únicos

$$\Delta\colon T(V)\to T(V)\otimes_c T(V)\qquad y\qquad \epsilon\colon T(V)\to k$$

tales que

$$\Delta(v)=1\otimes v+v\otimes 1\qquad y\qquad \epsilon(v)=0\quad \text{para todo } v\in V.$$

Es fácil ver que $T(V)$, provisto con esas aplicaciones estructurales, es un álgebra de Hopf trenzada, con trenza c y antípoda S determinada por

$$S(v)=-v\quad y\quad S(xy)=\mu_{T(V)}((S\otimes S)(c(x\otimes y)))\quad \text{para todo } v\in V \text{ y } x,y\in T(V).$$

Denotamos con $T_c(V)$ a esta álgebra de Hopf trenzada.

En los ejemplos que siguen, por un ideal entendemos un ideal bilátero, y por un coideal entendemos un coideal bilátero.

Ejemplo 1.12. *Sea H una biálgebra trenzada. Si $I \subseteq H$ es un ideal, un coideal y*

$$c(I \otimes H + H \otimes I) \subseteq I \otimes H + H \otimes I,$$

entonces el espacio vectorial cociente H/I tiene una única estructura de biálgebra trenzada tal que la proyección canónica $\pi : H \to H/I$ es una aplicación de biálgebras trenzadas. Además, si H es un álgebra de Hopf trenzada y $S(I) \subseteq I$, entonces H/I es un álgebra de Hopf trenzada.

Ejemplo 1.13. *Sea $T_c(V)$ como en el Ejemplo 1.11. Si $c^2 = \mathrm{id}_V$, entonces el ideal de $T(V)$ generado por $v \otimes w - c(v \otimes w)$ para todo $v, w \in V$ satisface las condiciones mencionadas en Ejemplo 1.12. El álgebra de Hopf trenzada cociente se llama el* álgebra simétrica de V respecto a *c y se denota por $S_c(V)$.*

Ejemplo 1.14. *Sea $q \in k^{\times}$. El espacio afín cuántico r-dimensional $k_q[x_1, ..., x_r]$ es la k- álgebra generada por las variables $x_1, ..., x_r$ y las relaciones $x_j x_i = q x_j x_i$ para $i < j$. Esta álgebra es un álgebra de Hopf trenzada vía la comultiplicación Δ, la counidad ϵ y la trenza c definidas por $\Delta(x_i) = 1 \otimes x_i + x_i \otimes 1, \epsilon(x_i) = 0$ y*

$$c(x_j \otimes x_i) = \begin{cases} q x_i \otimes x_j & \text{if } i < j, \\ x_i \otimes x_i & \text{if } i = j, \\ q^{-1} x_i \otimes x_j & \text{if } i > j. \end{cases} \tag{2.2}$$

En efecto, este es un caso particular del Ejemplo 1.13. Es fácil ver que

$$x_1^{m_1} \cdots x_r^{m_r} x_1^{n_1} \cdots x_r^{n_r} = q^{\sum_{i<j} n_i m_j} x_1^{m_1+n_1} \cdots x_r^{m_r+n_r},$$

$$\Delta(x_1^{m_1} \cdots x_r^{m_r}) = \sum_{h_1+l_1=m_1,...,h_r+l_r=m_r} q^{-\sum_{i<j} h_j l_i} \prod_{v=1}^{r} \binom{m_v}{l_v} x_1^{h_1} \cdots x_r^{h_r} \otimes x_1^{l_1} \cdots x_r^{l_r},$$

y

$$c(x_1^{m_1} \cdots x_r^{m_r} \otimes x_1^{n_1} \cdots x_r^{n_r}) = q^{\sum_{i<j} n_i m_j - \sum_{i>j} n_i m_j} x_1^{n_1} \cdots x_r^{n_r} \otimes x_1^{m_1} \cdots x_r^{m_r}.$$

Finalmente, la antípoda es la aplicación

$$S(x_1^{m_1} ... x_r^{m_r}) = (-1)^{m_1+...+m_r} x_1^{m_1} ... x_r^{m_r}.$$

Esta álgebra de Hopf trenzada es un ejemplo particular de los espacios lineales cuánticos, que han sido estudiados en [**2**].

Observación 1.15. *Supongamos que H es una biálgebra trenzada. Entonces como vimos en el Ejemplo 1.6, el k-espacio vectorial $H \otimes H$ es un álgebra, denotada $H \otimes_c H$, con unidad $\eta \otimes \eta$ y multiplicación $(\mu \otimes \mu) \circ (H \otimes c \otimes H)$ (esta estructura fue usada en la Observación 1.9). También es una coálgebra $H \otimes^c H$, con counidad $\epsilon \otimes \epsilon$ y comultiplicación $(H \otimes c \otimes H) \circ (\Delta \otimes \Delta)$. Además, si c es involutiva entonces $H \otimes H$, provisto de estas estructuras, es una biálgebra trenzada $H \otimes_c^c H$, con trenza*

$$(H \otimes c \otimes H) \circ (c \otimes c) \circ (H \otimes c \otimes H).$$

Finalmente, si c es involutiva y H es un álgebra de Hopf trenzada, entonces $H \otimes_c^c H$ también lo es, con antípoda $S \otimes S$.

Observación 1.16. *Sean H una biálgebra trenzada y $\tau : H \otimes H \to H \otimes H$ el flip. Un cálculo directo muestra que $\widetilde{H} := (H, \mu \circ \tau, \eta, \tau \circ \Delta, \epsilon)$ es una biálgebra trenzada con trenza $\widetilde{c} := \tau \circ c \circ \tau$. Además si H es una álgebra de Hopf trenzada con antípoda S, entonces $\widetilde{H}$ también lo es.*

Observación 1.17. *Si H una biálgebra trenzada, entonces*

$$H_c^{\mathrm{op}} := (H, \mu \circ c^{-1}, \eta, \Delta, \epsilon) \qquad y \qquad H_c^{\mathrm{cop}} := (H, \mu, \eta, c^{-1} \circ \Delta, \epsilon)$$

son biálgebras trenzadas, con trenza c^{-1}. Combinando estas dos construcciones obtenemos las biálgebras trenzadas $H_c^{\mathrm{op}\,cop}$ y $H_c^{cop\,\mathrm{op}}$, con trenza c. Además, si S es una antípoda para H, entonces también lo es para $H_c^{\mathrm{op\,cop}}$ y $H_c^{\mathrm{cop\,op}}$, y si S es biyectiva, entonces la inversa por la composición de S es una antípoda para H_c^{op} y H_c^{cop}. Para una prueba de estos hechos, ver [**1**, Proposición 2.2.4].

Sea H un álgebra de Hopf trenzada. La antípoda S de H es un morfismo de álgebras de Hopf trenzadas de $H_c^{\mathrm{op\,cop}}$ en H, y de H en $H_c^{\mathrm{cop\,op}}$.

2.1. Biálgebras trenzadas rígidas

En esta subsección recordamos la definición y algunas propiedades de las biálgebras trenzadas rígidas, que se necesitarán luego.

Sean V y W dos espacios vectoriales, con W de dimensión finita. Sean $\mathrm{ev}_W\colon W^* \otimes W \to k$ la aplicación de evaluación

$$\mathrm{ev}_W(\phi \otimes w) := \phi(w), \quad \text{donde } \phi \in W^* \text{ y } w \in W,$$

y $\mathrm{coev}_W\colon k \to W \otimes W^*$ la aplicación de coevaluación

$$\mathrm{coev}(1) := \sum_i e_i \otimes e_i^*, \quad \text{donde } \{e_i\} \text{ y } \{e_i^*\} \text{ son bases de } W \text{ y } W^*, \text{ duales una de la otra.}$$

Para cada aplicación $T\colon V \otimes W \longrightarrow W \otimes V$, Lyubashenko introdujo en [**22**] la función

$$T^\flat\colon W^* \otimes V \longrightarrow V \otimes W^*$$

definida por

$$T^\flat := (\mathrm{ev}_W \otimes V \otimes W^*) \circ (W^* \otimes T \otimes W^*) \circ (W^* \otimes V \otimes \mathrm{coev}_W).$$

Definición 1.18. *Una biálgebra trenzada de dimensión finita H es rígida si la aplicación*

$$c^\flat\colon H^* \otimes H \to H \otimes H^*$$

es biyectiva. En tal caso

$$(c^{-1})^\flat\colon H^* \otimes H \to H \otimes H^*$$

también es una función biyectiva.

Para cada biálgebra trenzada rígida H, sean $c_{H^*H} := (c^{-1})^\flat$, $c_{HH^*} := (c^\flat)^{-1}$ y $c_{H^*} := c^{\flat\flat}$.

Teorema 1.19 ([**30**, Teorema 5.7]). *Sea H una biálgebra trenzada rígida. Existen un álgebra de Hopf L, con antípoda biyectiva, y una biálgebra trenzada $\mathfrak{H}$ en la categoría de Yetter-Drinfeld $\mathcal{YD}_L^L$ tal que:*

1. *$(F(\mathfrak{H}), F(\mu_{\mathfrak{H}}), F(\eta_{\mathfrak{H}}), F(\Delta_{\mathfrak{H}}), F(\epsilon_{\mathfrak{H}})) = (H, \mu_H, \eta_H, \Delta_H, \epsilon_H)$, donde F es el functor de olvido de $\mathcal{YD}_L^L$ en $\mathcal{V}$ect.*
2. *Si $\mathfrak{c}$ es la trenza $\mathcal{YD}_L^L$, entonces $F(\mathfrak{c}_{\mathfrak{H}\mathfrak{H}}) = c_H$, $F(\mathfrak{c}_{\mathfrak{H}\mathfrak{H}^*}) = c_{HH^*}$, $F(\mathfrak{c}_{\mathfrak{H}^*\mathfrak{H}}) = c_{H^*H}$ y $F(\mathfrak{c}_{\mathfrak{H}^*\mathfrak{H}^*}) = c_{H^*}$.*
3. *$F(\mathrm{ev}_M) = \mathrm{ev}_{F(M)}$ y $F(\mathrm{coev}_M) = \mathrm{coev}_{F(M)}$ para cada objeto rígido $M \in \mathcal{YD}_L^L$, donde $\mathrm{ev}_M\colon M^* \otimes M \to k$ y $\mathrm{coev}_M\colon k \to M \otimes M^*$ son las aplicaciones de evaluación y coevaluación de M.*

Además, si H es un álgebra de Hopf trenzada, podemos tomar $\mathfrak{H}$ como un álgebra de Hopf en $\mathcal{YD}_L^L$. En este caso, $F(S_{\mathfrak{H}}) = S_H$.

Como se observó en [**31**, Section 1], cada función $f\colon V\otimes W\to \mathbf{1}$, en una categoría trenzada $\mathcal{C}$ con objeto inicial $\mathbf{1}$, cumple que

$$(U\otimes f)\circ(c_{VU}\otimes W)=(f\otimes U)\circ(V\otimes c_{WU}^{-1})$$

y

$$(U\otimes f)\circ(c_{UV}^{-1}\otimes W)=(f\otimes U)\circ(V\otimes c_{UW}),$$

para todo objeto $U\in\mathcal{C}$. Análogamente, cada función $g\colon \mathbf{1}\to V\otimes W$ satisface

$$(c_{UV}\otimes W)\circ(U\otimes g)=(V\otimes c_{UW}^{-1})\circ(g\otimes U)$$

y

$$(c_{VU}^{-1}\otimes W)\circ(U\otimes g)=(V\otimes c_{WU})\circ(g\otimes U).$$

Sea H una biálgebra trenzada rígida. Gracias al Teorema 1.19 esta observación puede aplicarse a las funciones ev_H y coev_H. Más aún, como fue observado en [**30**, Section 6], este teorema permite reformular todos los resultados conocidos acerca de biálgebras rígidas en una categoría de Yetter-Drinfeld como resultados sobre biálgebras trenzadas rígidas.

Sea H un álgebra de Hopf trenzada rígida.

Teorema 1.20 ([**31**, Teorema 4.1]). *La antípoda S de H es biyectiva.*

Definición 1.21. *Un elemento $t\in H$ es una integral a izquierda si $ht=\epsilon(h)t$ para todo $h\in H$, y es una integral a derecha si $th=\epsilon(h)t$ para todo $h\in H$. Denotamos con $\int_H^l$ al conjunto de las integrales a izquierda y con $\int_H^r$, al de integrales a derecha.*

Teorema 1.22 ([**23**, Teorema 1.6], [**16**, Corolario 5.8], [**12**, Teorema 3]). *Los conjuntos $\int_H^l$ y $\int_H^r$ son subespacios de dimensión uno de H.*

Teorema 1.23 ([**30**, Sección 7]). *Los conjuntos $\int_H^l$ y $\int_H^r$ tienen las siguientes propiedades:*

$$c\left(\int_H^l\otimes H\right)=H\otimes\int_H^l,$$

$$c\left(H\otimes\int_H^l\right)=\int_H^l\otimes H,$$

$$c\left(\int_H^r\otimes H\right)=H\otimes\int_H^r$$

y

$$c\left(H\otimes\int_H^r\right)=\int_H^r\otimes H.$$

Corolario 1.24. *Existen isomorfismos únicos de álgebras de Hopf trenzadas*

$$f_H^l\colon H\to H\quad y\quad f_H^r\colon H\to H,$$

tales que

$$c(h\otimes t)=t\otimes f_H^l(h)\qquad y\qquad c(u\otimes h)=f_H^r(h)\otimes u$$

para todo $t\in\int_H^l\setminus\{0\}$, $u\in\int_H^r\setminus\{0\}$ y $h\in H$.

Observación 1.25. *Sea $t\in\int_H^l$. Como*

$$S(t)S(f_H^l(h))=\mu\circ(S\otimes S)\circ c(h\otimes t)=S(ht)=\epsilon(h)S(t)=\epsilon(S(f_H^l(h)))S(t),$$

es cierto que $S(\int_H^l)=\int_H^r$. De modo similar puede probarse que $S(\int_H^r)=\int_H^l$. Además, el Corolario 1.24 implica que $\int_H^l=\int_{H_c^{\mathrm{op}}}^r$ y $\int_H^r=\int_{H_c^{\mathrm{op}}}^l$.

Observación 1.26. *Usando que c y S son compatibles, $S(\int_H^r) = \int_H^l$ y $S(\int_H^l) = \int_H^r$, se comprueba fácilmente que*

$$c(t \otimes h) = f_H^r(h) \otimes t \qquad y \qquad c(h \otimes u) = u \otimes f_H^r(h)$$

para todo $t \in \int_H^l \setminus \{0\}$, $u \in \int_H^r \setminus \{0\}$ y $h \in H$. De aquí se deduce que existe $q \in k \setminus \{0\}$ tal que $c(t \otimes t) = qt \otimes t$ y $c(u \otimes u) = qu \otimes u$.

Sea t una integral a izquierda no nula de H. Hay un morfismo de álgebras $\alpha\colon H \to k$ tal que $th = \alpha(h)t$ para todo $h \in H$. Esta aplicación se llama función modular de H. Del Corolario 1.25 y la Observacion 1.26 se sigue que si u es una integral a derecha no nula, entonces $hu = \alpha(S(f_H^l(h)))u$.

Teorema 1.27 ([**31**, Seccion 7]). *Las igualdades*

$$(\alpha \otimes H) \circ c = H \otimes \alpha \qquad y \qquad (H \otimes \alpha) \circ c = \alpha \otimes H$$

valen.

Teorema 1.28 (Teorema de Maschke). *Un álgebra de Hopf trenzada rígida H es semisimple si y sólo si existe $t \in \int_H^l$ tal que $\epsilon(t) \neq 0$.*

Usando este teorema es fácil ver que si H es semisimple, entonces $\int_H^l = \int_H^r$ y las aplicaciones f_H^r y f_H^l, introducidas en el Corolario 1.24, son la función identidad.

Teorema 1.29 ([**31**, Teorema 2.16]). *Si H es una biálgebra trenzada rígida, entonces H^* también lo es, con trenza $c_{H^*} = (c_H)^{\flat\flat}$ y multiplicación, unidad, comultiplicación y counidad dadas por*

$$\begin{aligned}
&\mu_{H^*} := (\mathrm{ev}_H \otimes H^*) \circ (H^* \otimes \mathrm{ev}_H \otimes H \otimes H^*) \circ (H^{*\otimes 2} \otimes \Delta_H \otimes H^*) \circ (c_{H^*} \otimes \mathrm{coev}_H),\\
&\eta_{H^*}(\lambda) := \lambda \cdot \epsilon_H \textit{ for all } \lambda \in k,\\
&\Delta_{H^*} := (\mathrm{ev}_H \otimes c_{H^*}^{-1}) \circ (H^* \otimes \mu_H \otimes H^{*\otimes 2}) \circ (H^* \otimes H \otimes \mathrm{coev}_H \otimes H^*) \circ (H^* \otimes \mathrm{coev}_H),\\
&\epsilon_{H^*}(\varphi) := \varphi(1) \textit{ for all } \varphi \in H^*.
\end{aligned}$$

Además, si H es un álgebra de Hopf trenzada, entonces también lo es H^*, y su antípoda es la función $S_{H^*}(\varphi) := \varphi \circ S_H$. Finalmente, la correspondencia $H \mapsto H^*$ es functorial de un modo evidente.

Observación 1.30. *Para cada biálgebra trenzada rígida H, la biyección canónica $H \to H^{**}$ es un isomorfismo de biálgebras (en el sentido de la Definición 1.10, pero no como biálgebras en una categoría de Yetter-Drinfeld ${}^L_L\mathcal{YD}$, porque no es compatible con las acciones de L sobre H y H^{**}).*

3. Coeficientes binomiales gaussianos

Sea q una variable. Para cualquier $j \in \mathbb{N}_0$ escribamos

$$(j)_q := \sum_{i=0}^{j-1} q^i = \frac{q^j - 1}{q - 1} \quad \text{y} \quad (j)!_q := (1)_q (2)_q \cdots (j)_q = \frac{(q-1)(q^2-1)\cdots(q^j-1)}{(q-1)^j}.$$

En particular, $(0)_q = 0$ y $(0)!_q = 1$. Los *binomios de Gauss* son los polinomios en q definidos por

$$\binom{r}{s}_q := \frac{(r)!_q}{(s)!_q (r-s)!_q} \qquad \text{para } 0 \leq s \leq r. \tag{3.3}$$

Un cálculo directo muestra que

$$\binom{r}{0}_q = \binom{r}{r}_q = 1 \quad \text{y} \quad \binom{r}{s}_q = q^{r-s}\binom{r-1}{s-1}_q + \binom{r-1}{s}_q \quad \text{para } 0 < s < r.$$

De estas igualdades se sigue fácilmente que los binomios de Gauss son verdaderamente polinomios. Estos binomios pueden evaluarse en elementos arbitrarios de k, pero la igualdad (3.3) solamente tiene sentido para $q = 1$ y para $q \neq 1$ tal que $q^j \neq 1$ para todo $j \leq \text{máx}(s, r-s)$. Necesitaremos el siguiente resultado bien conocido (fórmula q-binomial). Sean B una k-álgebra y $q \in k$. Si $x, y \in B$ satisfacen $yx = qxy$, entonces

$$(x+y)^r = \sum_{s=0}^{r} \binom{r}{s}_q x^s y^{r-s} \quad \text{para cada } r \geq 0. \tag{3.4}$$

Sean $i, j \geq 0$ y sea $0 \leq l \leq i + j$. Usando la igualdad (3.4) para calcular $(x+y)^i(x+y)^j$ de dos maneras diferentes y comparando coeficientes obtenemos que

$$\binom{i+j}{l}_q = \sum_{\substack{0 \leq s \leq i \\ 0 \leq t \leq j \\ s+t=l}} q^{(i-s)t} \binom{i}{s}_q \binom{j}{t}_q. \tag{3.5}$$

Capítulo 2

Productos cruzados trenzados

La noción clásica de producto cruzado de Hopf fue introducida independientemente en [**3**] y [**14**], como una generalización natural al contexto de álgebras de Hopf, de los productos cruzados de álgebras asociativas por grupos. Esta construcción asocia a cada upla (A,H,ρ,f), formada por un álgebra asociativa y unitaria A, un álgebra de Hopf H y un par de funciones lineales

$$\rho\colon H\otimes A\to A \quad \text{y} \quad f\colon H\otimes H\to A$$

que cumplen condiciones adecuadas, un álgebra asociativa y unitaria $A\#_f H$. Como dijimos en la introducción, muchos de los resultados conocidos para productos cruzados por grupos tienen generalizaciones apropiadas en este contexto. Una referencia clásica sobre el tema es [**26**]. En este capítulo introducimos una noción de producto cruzado de un álgebra por un álgebra de Hopf trenzada, y comenzamos su estudio. La construcción depende de un nuevo dato: una aplicación lineal

$$s\colon H\otimes A\longrightarrow A\otimes H,$$

llamada una *transposición de H sobre A*, que es compatible con las estructuras algebraicas de H y A. Cuando H es estándar nuestra definición es más general que la dada en [**3**]. Por ejemplo, los productos cruzados de un álgebra A por el álgebra de polinomios en una variable (considerada como el álgebra de Hopf del álgebra de Lie de dimensión uno), incluyen a las extensiones de Ore de tipo automorfismo, las que no son productos cruzados en el sentido clásico. La noción estándar de producto cruzado de Hopf se recupera cuando H es estándar y s es el flip.

El capítulo está organizado de la siguiente forma: en la Sección 1 definimos el concepto de transposición y estudiamos sus propiedades; en la Sección 2 adaptamos a nuestro contexto las nociones de H-comódulo álgebra y de H-módulo álgebra; en la Sección 3 generalizamos los conceptos de acción débil y de acción e introducimos los productos semidirectos asociados a estas; en la Sección 4 estudiamos el anillo de invariantes de una acción; en la Sección 5 generalizamos a nuestro ámbito el contexto Morita considerado en [**7**]; en la Sección 6 introducimos los productos cruzados por álgebras de Hopf trenzadas, los cuales son nuestro principal objetivo de estudio; en la Sección 7 obtenemos caracterizaciones íntrinsecas de estos productos cruzados como un tipo de extensiones cleft y de extensiones normales de Galois; en la Sección 8 mostramos que nuestros productos cruzados satisfacen el Teorema de Maschke; finalmente, en la Sección 9, determinamos condiciones necesarias y suficientes para que dos productos cruzados sean equivalentes en un sentido natural.

1. Transposiciones

Sean H una biálgebra trenzada y A un álgebra. En esta sección introduciremos un tipo particular de aplicaciones torcidas de H en A, llamadas transposiciones, que son compatibles con la estructura de biálgebra trenzada de H.

1.1. Definición, propiedades básicas y ejemplos

Por definición, un *H-espacio trenzado a izquierda* (V, s) es un espacio vectorial V provisto de una aplicación biyectiva

$$s\colon H \otimes V \longrightarrow V \otimes H,$$

llamada la *transposición a izquierda de H sobre V*, que es compatible con la estructura de biálgebra de H y satisface

$$(s \otimes H) \circ (H \otimes s) \circ (c \otimes V) = (V \otimes c) \circ (s \otimes H) \circ (H \otimes s) \quad \text{(compatibilidad de } s \text{ con la trenza).}$$

Razonando como en la prueba de [**30**, Proposición 5.5], se verifica que cuando H es un álgebra de Hopf trenzada, se cumple que

$$s \circ (S \otimes V) = (V \otimes S) \circ s.$$

Además es fácil ver que (V, s) es un H-espacio trenzado a izquierda si y sólo si es un H_c^{op}-espacio trenzado a izquierda, y que esto ocurre si y sólo si es un H_c^{cop}-espacio trenzado a izquierda. Una aplicación $g\colon V \to V'$ es un *morfismo de H-espacios trenzados a izquierda*, de (V, s) a (V', s'), si

$$(g \otimes H) \circ s = s' \circ (H \otimes g).$$

Las nociones de H-espacio trenzado a derecha y de morfismo de H-espacios trenzados a derecha se definen de forma análoga.

Sean H una biálgebra trenzada, V un espacio vectorial y $s\colon H \otimes V \longrightarrow V \otimes H$ una función biyectiva. Se comprueba fácilmente que (V, s) es un H-espacio trenzado a izquierda si y sólo si (V, s^{-1}) es un H-espacio trenzado a derecha.

Para cada resultado sobre H-espacios trenzados a izquierda hay un resultado análogo para H-espacios trenzados a derecha. Lo mismo es cierto para las nociones de transposición, H-módulo, H-módulo álgebra, H-comódulo y H-comódulo álgebra que serán introducidas más adelante. En general daremos la versión a izquierda para H-espacios trenzados, transposiciones y módulos y la versión a derecha para comódulos.

Observación 2.1. *Sea $s\colon H \otimes V \longrightarrow V \otimes H$ una aplicación compatible con la unidad, la multiplicación y la trenza de H y sea $X \subseteq H$ un conjunto que genera H como álgebra. Para mostrar que s es una transposición a izquierda es suficiente comprobar la compatibilidad de s con la counidad y la comultiplicación de H sobre tensores simples $h \otimes v$ con $h \in X$ y $v \in V$.*

Definición 2.2. *Sean H una biálgebra trenzada y A un álgebra. Una* transposición a izquierda *de H sobre A es una función $s\colon H \otimes A \longrightarrow A \otimes H$ tal que (A, s) es un H-espacio trenzado a izquierda y s es compatible con la estructura de álgebra de A.*

Definición 2.3. *Sean H una biálgebra trenzada y A un álgebra. Una* transposición a derecha *de H sobre A es una función $s\colon A \otimes H \longrightarrow H \otimes A$ tal que (A, s) es un H-espacio trenzado a derecha y s es compatible con la estructura de álgebra de A.*

Definición 2.4. *Una H-*álgebra trenzada a izquierda *es un par (A, s), donde A es un álgebra y s una transposición a izquierda de H sobre A. De modo similar, si s es una transposición a derecha, decimos que (A, s) una H-*álgebra trenzada a derecha.

Observación 2.5. *Usando la compatibilidad de s con c es fácil ver que s es una transposición de H en A a izquierda (derecha) si y sólo si es una transposición de H_c^{op} en A a izquierda (derecha), y que esto sucede si y sólo si s es una transposición de H_c^{cop} en A a izquierda (derecha). También puede verse que s es una transposición a izquierda de H sobre A si y sólo si s^{-1} es una transposición a derecha de H sobre A. Además, un cálculo directo muestra que s es una transposición de H en A si y sólo si $\widetilde{s^{-1}} := \tau \circ s^{-1} \circ \tau$ es una transposición de $\widetilde{H}$ sobre A^{op}, donde $\widetilde{H}$ es la biálgebra trenzada de la Observación 1.16 y A^{op} es el álgebra opuesta de A.*

El siguiente resultado es una variante de la Proposición 5.1 de [**30**].

Proposición 2.6 ([**30**, Proposición 5.1]). *Sea H un álgebra de Hopf trenzada, A un espacio vectorial y $s\colon H \otimes A \longrightarrow A \otimes H$ una función biyectiva. Si s es compatible con la estructura de biálgebra de H, entonces $s \circ (S \otimes A) = (A \otimes S) \circ s$.*

Demostración. La igualdad establecida en el enunciado está probada en la Figura 1, en la cual

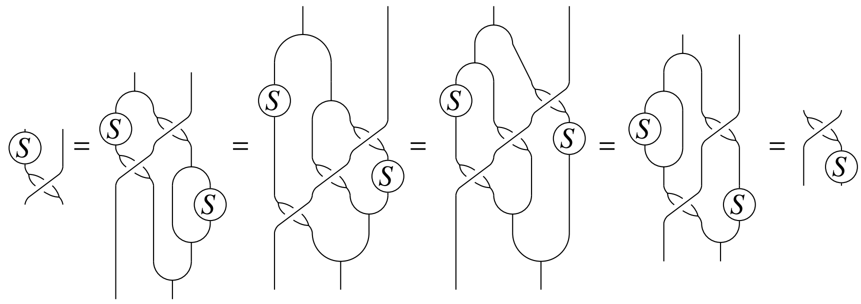


Figura 1

la segunda igualdad se deduce de la compatibilidad de s con Δ, la tercera de la coasociatividad de Δ y la asociatividad de μ y la cuarta de la compatibilidad de s con μ. □

Proposición 2.7. *Sea* $\operatorname{Prim} H$ *el subespacio de los elementos primitivos de H. Para cada transposición $s\colon H \otimes A \longrightarrow A \otimes H$, es cierto que $s(\operatorname{Prim} H \otimes A) \subseteq A \otimes \operatorname{Prim} H$.*

Demostración. Sea L un complemento de $\operatorname{Prim} H$ en $\operatorname{Ker} \epsilon$, $\mathcal{B}$ una base de $\operatorname{Prim} H$ y $\mathcal{B}'$ una base de L. Sea $x \in \operatorname{Prim} H$ y $a \in A$. Por la compatibilidad de s con ϵ, podemos escribir:

$$s(x \otimes a) = \sum_{y \in \mathcal{B} \cup \mathcal{B}'} \alpha_x^y(a) \otimes y \qquad \text{con } \alpha_x^y(a) \in A \text{ únivocamente determinadas.}$$

Debemos probar que $\alpha_x^z(a) = 0$ para todo $z \in \mathcal{B}'$. Debido a la compatibilidad de s con Δ y con la unidad,

$$\begin{aligned} &\sum_{y \in \mathcal{B}} \alpha_x^y(a) \otimes (1 \otimes y + y \otimes 1) + \sum_{z \in \mathcal{B}'} \alpha_x^z(a) \otimes (1 \otimes z + z \otimes 1) \\ &\qquad = \sum_{y \in \mathcal{B}} \alpha_x^y(a) \otimes (1 \otimes y + y \otimes 1) + \sum_{z \in \mathcal{B}'} \alpha_x^z(a) \otimes \Delta(z), \end{aligned}$$

lo cual implica que

$$\sum_{z \in \mathcal{B}'} \alpha_x^z(a) \otimes (\Delta(z) - (1 \otimes z + z \otimes 1)) = 0.$$

Si $\alpha_x^z(a) \neq 0$ para algún $z \in \mathcal{B}'$, entonces los elementos

$$\Delta(z) - (1 \otimes z + z \otimes 1)$$

son linealmente dependientes. Por lo tanto, existe una familia de escalares de soporte finito $(\lambda_z)_{z\in\mathcal{B}'}$, con algún $\lambda_z \neq 0$ tal que

$$\Delta\left(\sum_{z\in\mathcal{B}'}\lambda_z z\right) = \sum_{z\in\mathcal{B}'}\lambda_z\Delta(z) = \sum_{z\in\mathcal{B}'}\lambda_z(1\otimes z + z\otimes 1) = 1\otimes\sum_{z\in\mathcal{B}'}\lambda_z z + \sum_{z\in\mathcal{B}'}\lambda_z z\otimes 1,$$

lo cual es una contradicción, debido a que $L\cap \operatorname{Prim} H = 0$. □

Ejemplo 2.8. *Sea $T_c(V)$ como en el Ejemplo 1.11. Una aplicación $s\colon V\otimes A\to A\otimes V$ se puede extender a una transposición de $T_c(V)$ si y sólo si satisface las siguientes condiciones:*

i) $s(v\otimes 1) = 1\otimes v$,

ii) $s\circ(v\otimes\mu) = (\mu\otimes V)\circ(A\otimes s)\circ(s\otimes A)$,

iii) $(s\otimes V)\circ(V\otimes s)\circ(c\otimes A) = (A\otimes c)\circ(s\otimes V)\circ(V\otimes s)$.

Si $c^2 = \mathrm{id}$, lo mismo es cierto para el álgebra cuántica simétrica $S_c(V)$.

Observación 2.9. *En relación al Ejemplo 2.8 es útil observar que:*

1. *Si A es el álgebra tensorial $T_c(W)$, entonces cada isomorfismo $s\colon V\otimes W\longrightarrow W\otimes V$ que cumple*

$$(s\otimes V)\circ(V\otimes s)\circ(c\otimes W) = (W\otimes c)\circ(s\otimes V)\circ(V\otimes s)$$

se puede extender a una única aplicación $s\colon V\otimes A\longrightarrow A\otimes V$ que satisface las condiciones i), ii) y iii).

2. *Asumamos que $c^2 = \mathrm{id}$. Si A es el álgebra simétrica $S_c(W)$, entonces cada isomorfismo $s\colon V\otimes W\longrightarrow W\otimes V$ que cumple*

$$(s\otimes V)\circ(V\otimes s)\circ(c\otimes W) = (W\otimes c)\circ(s\otimes V)\circ(V\otimes s)$$

y

$$(c_W\otimes V)\circ(W\otimes s)\circ(s\otimes W) = (W\otimes s)\circ(s\otimes W)\circ(V\otimes c_W)$$

se extiende a una única aplicación $c\colon V\otimes A\longrightarrow A\otimes V$ que satisface las condiciones i),ii) y iii).

Ejemplo 2.10. *Sean*

$$k_q[\partial/\partial\boldsymbol{X}] := k_q[\tfrac{\partial}{\partial x_1},\dots,\tfrac{\partial}{\partial x_r}] \quad y \quad k_q[\boldsymbol{X}] = k_q[x_1\cdots,x_r]$$

dos espacios afines cuánticos r-dimensionales (ver Ejemplo 1.14) y sea $p\in k\setminus\{0\}$. El ítem (2) de la Observación 2.9 implica que la aplicación

$$s\colon\langle\partial/\partial\boldsymbol{X}\rangle\otimes\langle\boldsymbol{X}\rangle\longrightarrow\langle\boldsymbol{X}\rangle\otimes\langle\partial/\partial\boldsymbol{X}\rangle,$$

definida por

$$s\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\otimes x_i\right) := \begin{cases} q^{-1}x_i\otimes\dfrac{\partial}{\partial x_j} & \text{si } i<j,\\ px_i\otimes\dfrac{\partial}{\partial x_j} & \text{si } i=j,\\ qx_i\otimes\dfrac{\partial}{\partial x_j} & \text{si } i>j,\end{cases}$$

determina una transposición de $k_q[\partial/\partial\boldsymbol{X}]$ en $k_q[\boldsymbol{X}]$.

Ejemplo 2.11. *Sean A y B álgebras y sea $A \otimes_\chi B$ un producto tensorial torcido (ver el Ejemplo 1.6 de la Sección 1). Sean*

$$s_A \colon H \otimes A \longrightarrow A \otimes H \qquad y \qquad s_B \colon H \otimes B \longrightarrow B \otimes H$$

transposiciones. Un cálculo directo muestra que si

$$(\chi \otimes H) \circ (B \otimes s_A) = (A \otimes s_B) \circ (s_A \otimes B) \circ (H \otimes \chi), \tag{1.6}$$

entonces $(A \otimes s_B) \circ (s_A \otimes B)$ es una transposición de H en $A \otimes_\chi B$.

1.2. Transposiciones de grupos

En esta subsección vamos a caracterizar las transposiciones de un álgebra de grupo $k[G]$ en un álgebra A. Para ello primero caracterizaremos los $k[G]$-espacios trenzados a izquierda. Comenzamos observando que dado un k-espacio vectorial V, cada aplicación

$$s \colon k[G] \otimes V \longrightarrow V \otimes k[G],$$

determina unívocamente aplicaciones $\alpha_x^y \colon V \to V$ $(x, y \in G)$ por la fórmula

$$s(x \otimes v) = \sum_{y \in G} \alpha_x^y(v) \otimes y.$$

Proposición 2.12. *El par (V, s) es un $k[G]$-espacio trenzado a izquierda si y sólo si s es una función biyectiva y se cumplen las siguientes condiciones:*

1. *$(\alpha_x^y)_{y \in G}$ es una familia completa de idempotentes ortogonales para todo $x \in G$,*
2. *$\alpha_1^1 = \mathrm{id}$,*
3. *$\alpha_{xy}^z = \sum_{rs=z} \alpha_x^r \circ \alpha_y^s$, para todo $x, y, z \in G$.*

Demostración. Es fácil ver que (V, s) es un $k[G]$-espacio trenzado a izquierda si y sólo si

$$\alpha_x^y = \alpha_{x^{-1}}^{y^{-1}} \quad \text{y} \quad \alpha_x^r \circ \alpha_y^s = \alpha_y^s \circ \alpha_x^r \qquad \text{para todo } x, y, z, r, s \in G$$

y las propiedades (1)–(3) se cumplen. Entonces debemos verificar que las condiciones (1)–(3) implican que las dos primeras igualdades valen. De (1),(2) y (3) se deduce que

$$\alpha_x^y = \sum_{r \in G} \alpha_x^y \circ \alpha_x^r \circ \alpha_{x^{-1}}^{r^{-1}} = \alpha_x^y \circ \alpha_{x^{-1}}^{y^{-1}} = \sum_{r \in G} \alpha_x^r \circ \alpha_{x^{-1}}^{r^{-1}} \circ \alpha_{x^{-1}}^{y^{-1}} = \alpha_{x^{-1}}^{y^{-1}}.$$

Esto prueba que vale la primera igualdad. Por (1), para probar que vale la segunda alcanza con ver que se cumple que

$$\alpha_y^{s'} \circ \alpha_x^r \circ \alpha_y^s = 0 \quad \text{si } s \neq s'.$$

Como $\alpha_y^s = (\alpha_y^s)^2$ y $\alpha_x^{r'} (r' \in G)$ es una familia completa de idempotentes ortogonales, para ello alcanza con observar que

$$\alpha_x^{r'} \circ \alpha_y^{s'} \circ \alpha_x^r \circ \alpha_y^s(a) = 0 \quad \text{para cada } r' \in G \text{ y } a \in \operatorname{Im} \alpha_y^s.$$

Sean $z' = r's'$ y $z = rs$. Primero supongamos que $z \neq z'$. Entonces

$$0 = \alpha_{xy}^{z'} \circ \alpha_{xy}^z(v) = \left(\sum_{p'q'=z'} \alpha_x^{p'} \circ \alpha_y^{q'} \right) \circ \left(\sum_{pq=z} \alpha_x^p \circ \alpha_y^q \right)(v) = \sum_{p'q'=z'} \alpha_x^{p'} \circ \alpha_y^{q'} \circ \alpha_x^r \circ \alpha_y^s(v).$$

Como las imágenes de las aplicaciones $\alpha_x^{p'}, (p' \in G)$ están en suma directa, de las igualdades anteriores se sigue que $\alpha_x^{r'} \circ \alpha_y^{s'} \circ \alpha_x^r \circ \alpha_y^s(v) = 0$, como deseábamos. Supongamos ahora que $z = r's' = rs$. Entonces

$$\alpha_x^r \circ \alpha_y^s(v) = \sum_{pq=z} \alpha_x^p \circ \alpha_y^q(v) = \alpha_{xy}^z(v) = (\alpha_{xy}^z)^2(v) = \sum_{p'q'=z'} \alpha_x^{p'} \circ \alpha_y^{q'} \circ \alpha_x^r \circ \alpha_y^s(v).$$

De nuevo como las imágenes de las aplicaciones $\alpha_x^{p'}$, $(p' \in G)$ están en suma directa y $r \neq r'$, las últimas ecuaciones implican que $\alpha_x^{r'} \circ \alpha_y^{s'} \circ \alpha_x^r \circ \alpha_y^s(v) = 0$. □

Sea $s\colon k[G] \otimes V \longrightarrow V \otimes k[G]$ una aplicación. Dados $x, y \in G$, denotamos con V_x^y al conjunto

$$V_x^y := \{v \in V\colon\ s(x \otimes v) = v \otimes y\}.$$

Proposición 2.13. *El par (V, s) es un $k[G]$-espacio trenzado a izquierda si y sólo si*

1. $\bigoplus_{z \in G} V_x^z = V$ *para todo* $x \in G$,
2. $\bigoplus_{z \in G} V_z^x = V$ *para todo* $x \in G$,
3. $V_1^1 = V$,
4. $V_{xy}^z = \bigoplus_{rs=z} V_x^r \cap V_y^s$, *for all* $x, y, z \in G$.

Demostración. Es claro que si (V, s) es un $k[G]$-espacio trenzado a izquierda, entonces se cumplen (1), (2) y (3). Además se comprueba fácilmente que las aplicaciones $\alpha_x^r \circ \alpha_y^s$ $(r, s \in G)$ son una familia completa de idempotentes ortogonales. Así:

$$\bigoplus_{y \in G} V_{xy}^z = V = \bigoplus_{r,s \in G} V_x^r \cap V_y^s.$$

Como $V_x^r \cap V_y^s \subseteq V_{xy}^{rs}$, esto implica que también vale (4). Para probar que la aserción recíproca también es cierta alcanza con observar que los idempotentes $\alpha_x^y \in \mathrm{End}_k(V)$, asociados a la descomposición $V = \bigoplus_{y \in G} V_x^y$, satisfacen las propiedades enunciadas en la Proposición 2.12. Dejamos esta tarea al lector. □

Observación 2.14. *Usando los ítems (1) y (4) de la Proposición 2.13 es fácil probar por inducción en n que, para cada familia finita $x_1 \cdots x_n$ de elementos de G,*

$$V = \bigoplus_{y_1 \cdots y_n \in G} V_{x_1}^{y_1} \cap \cdots \cap V_{x_n}^{y_n}$$

Proposición 2.15. *Para cada $k[G]$-espacio trenzado a izquierda (V, s), es cierto que*

$$s^{-1}(v \otimes x) = \sum_{y \in G} y \otimes \alpha_y^x(v) \quad \textit{para todo } x \in G, v \in V.$$

Demostración. Se comprueba fácilmente. □

Teorema 2.16. *Si G es un grupo finitamente generado, entonces cada $k[G]$-espacio trenzado a izquierda (V, s) determina una* $\mathrm{Aut}(G)$*-graduación*

$$V = \bigoplus_{\zeta \in \mathrm{Aut}(G)} V_\zeta$$

sobre V, por

$$V_\zeta := \bigcap_{x \in G} V_x^{\zeta(x)} = \{v \in V : s(x \otimes v) = v \otimes \zeta(x)\, \textit{for all } x \in G\}.$$

Además, la correspondencia que a cada $k[G]$–espacio trenzado a izquierda (V, s), con k-espacio vectorial subyacente V, le asigna la $\mathrm{Aut}(G)$*-graduación de V obtenida arriba, es biyectiva.*

Demostración. Fijemos un $k[G]$-espacio trenzado a izquierda (V, s). Sea $\{x_1 \cdots x_n\}$ un conjunto de generadores de G. Por la Proposición 2.13, para cada $\zeta \in \mathrm{Aut}(G)$ la componente homogénea de grado ζ de V es:

$$V_\zeta = \bigcap_{x \in G} V_x^{\zeta(x)} = V_{x_1}^{\zeta(x_1)} \cap \cdots \cap V_{x_n}^{\zeta(x_n)}.$$

Por la Observación 2.14, para verificar que $V = \bigoplus_{\zeta \in \mathrm{Aut}(G)} V_\zeta$, será suficiente observar que si

$$V_{x_1}^{y_1} \cap \cdots \cap V_{x_n}^{y_n} \neq 0,$$

entonces existe un endomorfismo ζ de G que cumple que $\zeta(x_i) = y_i$. Sea v un elemento no nulo de $V_{x_1}^{y_1} \cap \cdots \cap V_{x_n}^{y_n}$ y sea $K \subseteq G$ el conjunto de todos los $x \in G$ tales que $v \in V_x^y$ para algún (necesariamente único) $y \in G$. Por los ítems (2) y (3) de la Proposición 2.13 y el hecho de que $V_x^y = V_{x^{-1}}^{y-1}$ para todo $x, y \in G$, K es un subgrupo de G. Como $x_1, \cdots x_n \in K$, tenemos que $K = G$. Definimos ζ por $\zeta(x) := y$ si $v \in V_x^y$. Es fácil ver que $\zeta \in \mathrm{Aut}(G)$. Así,

$$V = \bigoplus_{\zeta \in \mathrm{Aut}(G)} V_\zeta$$

es un $k[G]$-módulo provisto de una $\mathrm{Aut}(G)$-graduación. Recíprocamente, dada una $\mathrm{Aut}(G)$-graduación

$$V = \bigoplus_{\zeta \in \mathrm{Aut}(G)} V_\zeta$$

de V, la fórmula

$$s(x \otimes v) = a \otimes \zeta(x) \quad \text{si } v \in V_\zeta,$$

convierte a (V, s) en un $k[G]$-espacio trenzado a izquierda. □

Proposición 2.17. *Sea A una k-álgebra. Una aplicación*

$$s\colon k[G] \otimes A \longrightarrow A \otimes k[G]$$

es una transposición si y sólo si, para todo $x, y, z \in G$, las siguientes condiciones se cumplen:

1. *α_x^v $(v \in G)$ es una familia completa de idempotentes ortogonales,*
2. *$\alpha_1^1 = \mathrm{id}$,*
3. *$\alpha_{xy}^z = \sum_{vw=z} \alpha_x^v \circ \alpha_y^w$,*
4. *$\alpha_x^x(1) = 1$,*
5. *$\alpha_x^y(ab) = \sum_{v \in G} \alpha_x^v(a) \alpha_v^y(b)$.*

Demostración. Es fácil ver que s es una transposición si y sólo si

$$\alpha_x^y = \alpha_{x^{-1}}^{y^{-1}} \quad \text{y} \quad \alpha_x^v \circ \alpha_y^w = \alpha_y^w \circ \alpha_x^v \qquad \text{para todo } x, y, z, w \in G$$

y las propiedades (1)–(5) se cumplen. Entonces debemos verificar que las condiciones (1)–(5) implican que las dos primeras igualdades valen. Pero esto se sigue inmediatamente de la Proposición 2.12. □

Proposición 2.18. *Sea A una k-álgebra. Una aplicación*

$$s\colon k[G] \otimes A \longrightarrow A \otimes [G]$$

es una transposición si y sólo si la familia A_x^y satisface:

1. *$\bigoplus_{y \in G} A_x^y = A$ para todo $x \in G$,*
2. *$\bigoplus_{x \in G} A_x^y = A$ para cada $y \in G$.*
3. *$A_1^1 = A$,*
4. *$A_{xy}^z = \bigoplus_{vw=z} A_x^v \cap A_y^w$, para todo $x, y, z, \in G$,*
5. *$1 \in A_x^x$, para todo $x \in G$,*
6. *Si $a \in A_x^y$ y $b \in A_y^z$, entonces $ab \in A_x^z$, para todo $x, y, z, \in G$,*

Demostración. Es claro que si s es una transposición, entonces se cumplen (1), (2), (3), (5) y (6). Además, por la Proposición 2.13 también se satisface (4). Para probar que la aserción recíproca también es cierta alcanza con observar que los idempotentes $\alpha_x^y \in \mathrm{End}_k(A)$, asociados a la descomposición

$$A = \bigoplus_{y\in G} A_x^y,$$

satisfacen las propiedades enunciadas en la Proposición 2.17. Dejamos esta tarea al lector. □

Teorema 2.19. *Sean G un grupo finitamente generado y A una k-álgebra. Cada transposición*

$$s\colon k[G]\otimes A \longrightarrow A\otimes k[G]$$

determina una $\mathrm{Aut}(G)^{\mathrm{op}}$*-graduación* $A = \bigoplus_{\zeta\in\mathrm{Aut}(G)} A_\zeta$ *en A por:*

$$A_\zeta = \bigcap_{x\in G} A_x^{\zeta(x)} = \{a\in A\colon\ s(x\otimes a) = a\otimes \zeta(x) \quad \textit{para todo } x\in G\},$$

y la correspondencia así definida es biyectiva.

Demostración. Por la Proposicion 2.16 basta observar dada una $k[G]$-graduación

$$A = \bigoplus_{\zeta\in\mathrm{Aut}(G)} A_\zeta,$$

A en un álgebra $\mathrm{Aut}(G)^{\mathrm{op}}$-graduada si y sólo si se satisfacen los ítems (5) y (6) de la Proposición 2.18. □

1.3. Transposiciones e integrales

La relación entre integrales y transposiciones está dada por el siguiente resultado:

Teorema 2.20. *Sean H un álgebra de Hopf trenzada rígida, A un álgebra y s una transposición de H sobre A. Existe un único automorfismo de álgebras $g_s\colon A\to A$, tal que $s(t\otimes a) = g_s(a)\otimes t$ para toda integral a izquierda o derecha $t\in H$. Además,*

$$s\circ (f_H^r\otimes g_s) = (g_s\otimes f_H^r)\circ s \quad \textit{y} \quad s\circ (f_H^l\otimes g_s^{-1}) = (g_s^{-1}\otimes f_H^l)\circ s,$$

donde f_H^r y f_H^l son las aplicaciones introducidas en el Corolario 1.24.

Demostración. Es claro que si existe una tal aplicación g_s, entonces es única. Sea $t\in H$ una integral a izquierda. Por la Observación 1.26 y la compatibilidad de s con ϵ y μ_H,

$$\begin{aligned}\epsilon(h)s(t\otimes a) &= \epsilon(f_H^r(h))s(t\otimes a)\\ &= s(f_H^r(h)t\otimes a)\\ &= (A\otimes\mu)\circ(s\otimes H)\circ(H\otimes s)\circ(c\otimes A)(t\otimes h\otimes a)\\ &= (A\otimes\mu)\circ(A\otimes c)\circ(s\otimes H)\circ(H\otimes s)(t\otimes h\otimes a),\end{aligned}\tag{1.7}$$

donde f_H^r es la aplicación introducida en el Corolario 1.24. Escribamos

$$s^{-1}(a\otimes h) = \sum_j h_j\otimes a_j.$$

Reemplazando $t\otimes h\otimes a$ por $\sum_j t\otimes h_j\otimes a_j$ en (1.7), se obtiene:

$$(A\otimes\mu)\circ(A\otimes c)\circ(s\otimes H)(t\otimes a\otimes h) = \sum_j \epsilon(h_j)s(t\otimes a_j) = \epsilon(h)s(t\otimes a),$$

donde la última igualdad vale porque $(\epsilon\otimes A)\circ s^{-1} = A\otimes\epsilon$. Escribamos

$$s(t\otimes a) = \sum_i a_i\otimes t_i, \quad \text{con los } a_i\text{'s linealmente independientes.}$$

Hemos probado ya que

$$\sum_i a_i \otimes \epsilon(h) t_i = \sum_i a_i \otimes \mu \circ c(t_i \otimes h) \quad \text{para todo } h \in H.$$

Como los a_i's son linealmente independientes, esta igualdad implica que cada t_i es una integral a derecha de $H_c^{\mathrm{cop\,op}}$, y por lo tanto una integral a izquierda de H (por el Corolario 1.25). Por consiguiente, existen λ_i's en k tales que $t_i = \lambda_i t$. En consecuencia, $s(t \otimes a) = g_s(a) \otimes t$ con $g_s(a) = \sum_i \lambda_i a_i$. Por la compatibilidad de s con la estructura de álgebra de A, la aplicación g_s es un endomorfismo de álgebras. Como

$$S\left(\int_H^l\right) = \int_H^r \quad \text{y} \quad s \circ (S \otimes A) = (A \otimes S) \circ s,$$

también es cierto que $s(u \otimes a) = g_s(a) \otimes u$ cuando u es una integral a derecha. Un argumento similar aplicado a la transposición $\widetilde{s^{-1}}$ introducida en la Observación 2.5, prueba que g_s es biyectiva. Finalmente, si

$$s(f_H^l(h) \otimes a) = \sum_j a_j \otimes h_j \quad \text{y} \quad s(h \otimes g_s(a)) = \sum_k a'_k \otimes h'_k,$$

entonces:

$$\begin{aligned}
\sum g_s(a_j) \otimes t \otimes h_j &= (s \otimes H) \circ (H \otimes s) \circ (c \otimes A)(h \otimes t \otimes a) \\
&= (A \otimes c) \circ (s \otimes H) \circ (H \otimes s)(h \otimes t \otimes a) \\
&= \sum a'_k \otimes t \otimes f_H^l(h'_k).
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$(g_s \otimes H) \circ s \circ (f_H^l \otimes A) = (A \otimes f_H^l) \circ s \circ (H \otimes g_s).$$

De modo similar puede verse probarse $s \circ (f_H^r \otimes g_s) = (g_s \otimes f_H^r) \circ s$. □

Observación 2.21. *Sea $s \colon H \otimes A \longrightarrow A \otimes H$ una transposición. Si H es un álgebra de Hopf trenzada rígida semisimple, entonces $g_s = \mathrm{id}_A$. En efecto, sean t una integral no nula de H y $a \in A$ arbitraria. Como $\epsilon(t)a = \epsilon(t) g_s(a)$ y, por el Teorema de Maschke, $\epsilon(t) \neq 0$, obtenemos que $g_s(a) = a$.*

Proposición 2.22. *Sean H un álgebra de Hopf trenzada rígida, $\alpha \colon H \to k$ la función modular de H, A un álgebra y $s \colon H \otimes A \longrightarrow A \otimes H$ una transposición. Entonces $(A \otimes \alpha) \circ s = \alpha \otimes A$.*

Demostración. Sea t una integral a izquierda no nula de H. Como s es compatible con la multiplicación de H y, por el Teorema 2.20, existe un automorfismo de álgebras $g_s \colon A \to A$ tal que $s(t \otimes a) = g_s(a) \otimes t$ para todo $a \in A$, las igualdades

$$\begin{aligned}
\alpha(h) g_s(a) \otimes t &= s(\alpha(h) t \otimes a) \\
&= s(th \otimes a) \\
&= \sum g_s(a_i) \otimes t h_i \\
&= \sum \alpha(h_i) g_s(a_i) \otimes t,
\end{aligned}$$

donde $\sum a_i \otimes h_i := s(h \otimes a)$, valen. Por lo tanto $\alpha(h)a = \sum \alpha(h_i) a_i$, como queríamos. □

Corolario 2.23. *Sean H un álgebra de Hopf trenzada rígida, $\alpha \colon H \to k$ la función modular de H, A un álgebra y $s \colon H \otimes A \longrightarrow A \otimes H$ una transposición. Es cierto que*

$$(A \otimes \alpha \rightharpoonup (-)) \circ s = s \circ (\alpha \rightharpoonup (-) \otimes A).$$

Demostración. Por la Proposición 2.22 y la compatibilidad de s con Δ, tenemos que

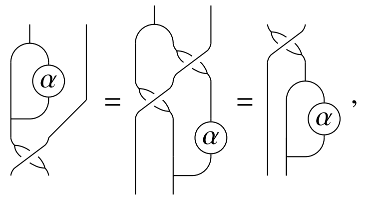


Figura 2

como queremos. □

1.4. Una propiedad técnica

Finalizaremos esta sección probando un resultado elemental que da condiciones suficientes para que dos diagramas representen la misma aplicación. Usaremos este resultado varias veces en las secciones subsiguientes. Recordamos que el *grupo de trenzas* B_r es el grupo definido por los generadores $\tau_1, \cdots, \tau_{r-1}$ y las relaciones

$$\tau_i \tau_j = \tau_j \tau_i \quad \text{si } |i-j| \geq 2, \tag{1.8}$$

$$\tau_i \tau_{i+1} \tau_i = \tau_{i+1} \tau_i \tau_{i+1}. \tag{1.9}$$

El *grupo simétrico* S_r es el grupo definido por los generadores

$$\sigma_1, \cdots, \sigma_{r-1}$$

sujetos a las relaciones (1.8), (1.9) y $(\sigma_i)^2 = 1 (1 \leq i < r)$. Pensamos los elementos de S_r como funciones del modo usual. La aplicación canónica $\phi\colon B_r \to S_r$ es el morfismo definido por $\phi(\tau_i) = \sigma_i$. Para cada $\tau \in B_r$, la permutación asociada con τ es, por definición, $\phi(\tau)$.

Decimos que un elemento $\tau \in B_r$ es *simple* si existen $\tau_{i_1}, \cdots, \tau_{i_n}$ tales que

$$\tau = \tau_{i_1}, \cdots, \tau_{i_n}$$

y $\sigma_{i_1}, \cdots, \sigma_{i_n}$ es una *expresión reducida* de $\phi(\tau)$. Es decir, para cada par de índices $p < q$, existe $0 \leq s \leq n$ tal que

$$\sigma_{i_j}, \cdots, \sigma_{i_n}(p) < \sigma_{i_j}, \cdots, \sigma_{i_n}(q) \qquad \text{para todo } j > s$$

y

$$\sigma_{i_j}, \cdots, \sigma_{i_n}(p) > \sigma_{i_j}, \cdots, \sigma_{i_n}(q) \qquad \text{para todo } j \leq s.$$

Una tal expresión de τ es llamada *simple*. Una expresión simple $\tau_{i_1}, \cdots, \tau_{i_n}$ de τ es *normal* si

$$\phi(\tau_{i_1}, \cdots, \tau_{i_j})(i) < \phi(\tau_{i_1}, \cdots, \tau_{i_j})(i+1) \quad \text{para todo } j \text{ y cada } i > i_j.$$

Por ejemplo, por (4),

$$\tau_2 \tau_1 \tau_2 = \tau_1 \tau_2 \tau_1.$$

Ambas expresiones son simples, pero la primera es normal, y la segunda no.

Proposición 2.24. *Cada elemento simple $\tau \in B_r$ tiene una expresión normal única.*

Demostración. Existencia: Vamos a probar por inducción en n que si τ tiene una expresión simple $\tau = \tau_{i_1} \cdots \tau_{i_n}$, entonces tiene una expresión normal $\tau = \tau_{j_1} \cdots \tau_{j_n}$. Esto es claro si $n \leq 1$. Supongamos que $n \geq 2$. Por hipótesis inductiva podemos asumir que $\tau_{i_1} \cdots \tau_{i_{n-1}}$ es una expresión normal. Sea m el máximo de los índices i tales que $\phi(\tau)(i) > \phi(\tau)(i+1)$. Es claro que $i_n \leq m$. Dividiremos la prueba en tres casos:

$m = i_n$: En este caso es fácil ver que $\tau_{i_1} \cdots \tau_{i_{n-1}} \tau_{i_n}$ es una expresión normal de τ.

$m > i_n + 1$: En este caso, usando que $\tau_{i_1} \cdots \tau_{i_{n-1}}$ es una expresión normal, se puede probar que $i_{n-1} = m$ y entonces

$$\tau_{i_1} \cdots \tau_{i_{n-1}} \tau_{i_n} = \tau_{i_1} \cdots \tau_{i_{n-2}} \tau_{i_n} \tau_{i_{n-1}}.$$

Por hipótesis inductiva, podemos escribir $\tau_{i_1} \cdots \tau_{i_{n-2}} \tau_{i_n}$ en una forma normal $\tau_{j_1} \cdots \tau_{j_{n-1}}$. Esto completa la prueba, dado que la expresión resultante

$$\tau = \tau_{j_1} \cdots \tau_{j_{n-1}} \tau_{i_{n-1}},$$

de τ, cumple las condiciones del caso 1).

$m = i_n + 1$: en este caso usando que $\tau_{i_1} \cdots \tau_{i_{n-1}}$ es un expresión normal, se puede probar que $i_{n-1} = m$ y que existe $l \geq 1$ tal que $i_{n-s} = i_n + s$ para $1 \leq s \leq l$ y $i_{n-l-1} = i_n$. Así:

$$\begin{aligned} \tau_{i_1} \cdots \tau_{i_{n-1}} \tau_{i_n} &= \tau_{i_1} \cdots \tau_{i_{n-l-2}} \tau_{i_n+l} \cdots \tau_{i_n+2} \tau_{i_n} \tau_{i_{n+1}} \tau_{i_n} \\ &= \tau_{i_1} \cdots \tau_{i_{n-l-2}} \tau_{i_n+l} \cdots \tau_{i_n+2} \tau_{i_{n+1}} \tau_{i_n} \tau_{i_{n+1}}, \end{aligned}$$

donde la última igualdad se sigue de la relación (1.9). Por hipótesis inductiva podemos escribir:

$$\tau_{i_1} \cdots \tau_{i_{n-l-2}} \tau_{i_n+l} \cdots \tau_{i_n+2} \tau_{i_{n+1}} \tau_{i_n}$$

en una forma normal $\tau_{j_1} \cdots \tau_{j_{n-1}}$. Esto completa la prueba, dado que la expresión resultante

$$\tau = \tau_{j_1} \cdots \tau_{j_{n-1}} \tau_{i_n+1},$$

de τ, satisface las condiciones del caso 1).

Unicidad: supongamos que

$$\tau_{j_1} \cdots \tau_{j_{n'}} = \tau_{i_1} \cdots \tau_{i_n}$$

son dos expresiones normales de τ. Entonces, por definición $j_{n'} = m = i_n$. La prueba puede completarse por inducción en $\text{mín}(n, n')$ □

Corolario 2.25. *Sean τ y τ' dos elementos simples de B_r. Si $\phi(\tau) = \phi(\tau')$, entonces $\tau = \tau'$*

Demostración. Sean

$$\tau = \tau_{i_1} \cdots \tau_{i_n} \quad \text{y} \quad \tau' = \tau_{j_1} \cdots \tau_{j_{n'}}$$

las expresiones normales de τ y τ' respectivamente. Observemos que $j_{n'} = m = i_n$, donde m es como en la prueba de la Proposición 2.24. La prueba se termina fácilmente por inducción en $\text{mín}(n, n')$. □

Ahora consideramos diagramas obtenidos por composición de los morfismos descriptos en la Figura 3, donde $V_1, \cdots, V_8$ son productos tensoriales de A's y H's. Enumeramos los vértices al

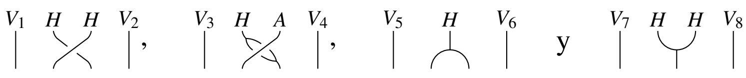


Figura 3

comienzo y final de un tal diagrama D de izquierda a derecha. Sea l una línea que une el techo y el piso de D. Sean $t(l)$ y $b(l)$ los vértices en el techo y en el piso de l, respectivamente, y sean $n_{D(i,j)}$

el cardinal del conjunto de líneas descendientes que unen i con j. Por ejemplo, para los diagramas que representan c y s, tenemos que

$$n_{D(1,1)} = n_{D(2,2)} = 0 \qquad \text{y} \qquad n_{D(1,2)} = n_{D(2,1)} = 1.$$

Decimos que un diagrama D como el anterior es admisible si dos líneas descendentes l y l' desde el techo hasta el piso de D se cruzan (por medio de c, s o una multiplicación seguida por una comultiplicación) a lo sumo una vez y, en este caso, $t(l) \neq t(l')$ y $b(l) \neq b(l')$.

Corolario 2.26. *Sean D_1 y D_2 dos diagramas admisibles. Si*

1. *D_1 y D_2 tienen el mismo dominio y codominio.*
2. *$n_{D_1}(i,j) = n_{D_2}(i,j)$ para cada vértice superior i y cada vértice inferior j,*

entonces las aplicaciones representadas por D_1 y por D_2 coinciden

Demostración. Sean ϕ_1 y ϕ_2 las aplicaciones representadas por los diagramas D_1 y D_2 respectivamente. Por la compatibilidad de Δ y μ con c y s, y el hecho de que

$$\Delta \circ \mu = (\mu \otimes \mu) \circ \Delta_{H \otimes_c^c H},$$

podemos reemplazar D_1 y D_2 por diagramas admisibles que representen las mismas aplicaciones, pero que tienen, de arriba hacia abajo, primero las comultiplicaciones, luego las trenzas y finalmente las multiplicaciones. Entonces

$$\phi_1 = \phi_1^M \phi_1^D \phi_1^C \qquad \text{y} \qquad \phi_2 = \phi_2^M \phi_2^D \phi_2^C,$$

donde ϕ_1^M, ϕ_2^M consisten de multiplicaciones, ϕ_1^D, ϕ_2^D de trenzas y ϕ_1^C, ϕ_2^C de comultiplicaciones. Afirmamos que $\phi_1^C = \phi_2^C$. En efecto, $\sum_j n_{D_l}(i,j)$ es el múmero de comultiplicaciones que ocurren el vértice i en el techo del diagrama D_l, para $l = 1, 2$. Como

$$n_{D_1}(i,j) = n_{D_2}(i,j) \quad \text{para todo } i, j,$$

la afirmación se sigue de la coasociatividad de la comultiplicación. Similarmente, $\phi_1^M = \phi_2^M$. Por último, el hecho de que $\phi_1^D = \phi_2^D$ se deduce del Corolario 2.25. □

2. H-comódulo álgebras y H-módulo álgebras

Sea H una biálgebra trenzada. Nuestro objetivo es adaptar a nuestro contexto las nociones de H-comódulo álgebra y H-módulo álgebra. Aunque en esta sección las aplicaciones s (a veces adornadas con un subíndice) no son necesariamente transposiciones, las representamos geométricamente como si lo fueran.

Denotemos con $\mathcal{B}_H$ a la categoría de los H-espacios trenzados a izquierda. Es fácil ver que ésta es una categoría monoidal con unidad (k, τ), donde $\tau\colon H \otimes k \longrightarrow k \otimes H$ es el flip, producto tensorial

$$(V, s_V) \otimes (U, s_U) := (V \otimes U, s_{V \otimes U}),$$

donde $s_{V\otimes U}\colon H \otimes V \otimes U \longrightarrow V \otimes U \otimes H$ es la aplicación definida por

$$s_{V \otimes U} := (V \otimes s_U) \circ (s_V \otimes U),$$

y las restricciones usuales de asociatividad y unidad. Como (H, c) es un objeto coálgebra y un objeto álgebra en $\mathcal{B}_H$, tiene sentido considerar (H, c)-módulos y (H, c)-comódulos a izquierda y derecha en esta categoría monoidal. Para abreviar diremos que (V, s) es un *H-comódulo a derecha*, si es un (H, c)-comódulo a derecha en $\mathcal{B}_H$, y que (V, s) es un *H-módulo a izquierda*, si es un (H, c)-módulo a izquierda en $\mathcal{B}_H$. Notemos que si (V, s) es un H-comódulo a derecha, entonces V es un H-comódulo a derecha en el sentido usual. Análogamente para H-módulos a izquierda.

Observación 2.27. *Sea (V, s) un H-espacio trenzado a izquierda. Se comprueba fácilmente que:*

1. *(V, s) es un H-módulo a izquierda si y sólo si V lo es en el sentido estándar y la acción $\rho\colon H \otimes V \to V$ satisface que*

$$s \circ (H \otimes \rho) = (\rho \otimes H) \circ (H \otimes s) \circ (c \otimes V), \tag{2.10}$$

2. *(V, s) es un H-comódulo a derecha si y sólo si V lo es en el sentido estándar y la coacción $\nu\colon V \to V \otimes H$ satisface que*

$$(\nu \otimes H) \circ s = (V \otimes c) \circ (s \otimes H) \circ (H \otimes \nu). \tag{2.11}$$

Además, una función

$$f\colon (V, s) \to (V', s')$$

es un morfismo de H-módulos a izquierda si y sólo si es un morfismo de H-espacios trenzados y

$$f \circ \rho = \rho' \circ (H \otimes f),$$

donde ρ y ρ' son las acciones de H sobre (V, s) y (V', s'), respectivamente. Los morfismos de H-comódulos a derecha tienen una caracterización análoga.

Sea (V, s) un H-espacio trenzado a derecha. Los conceptos de acción a derecha y de coacción a izquierda de H sobre (V, s) se introducen en forma similar, y valen caracterizaciones análogas.

Proposición 2.28. *Sea H una biálgebra trenzada. Un H-espacio trenzado a izquierda (V, s) es un H-módulo a izquierda vía*

$$\rho\colon H \otimes V \longrightarrow V$$

si y sólo si (V, s^{-1}) es un H_c^{op}-módulo a derecha vía $\rho \circ s^{-1}$. Análogamente, (V, s) es un H-comódulo a derecha vía

$$\nu\colon V \longrightarrow V \otimes H$$

si y sólo si (V, s^{-1}) es un H_c^{cop}-comódulo a izquierda vía $s^{-1} \circ \nu$.

Demostración. La dejamos al lector. □

Por ejemplo, cuando H es una biálgebra estándar y

$$s\colon H \otimes V \longrightarrow V \otimes H$$

es el flip, entonces (V, s) es un H-comódulo a derecha si y sólo si V es un H-comódulo a derecha estándar y (V, s) es un H-módulo a izquierda si y sólo si V es un H-módulo a izquierda estándar.

Definición 2.29. *Sea V un H-comódulo a derecha (izquierda) estándar con coacción ν. Decimos que $v \in V$ es* H-coinvariante a derecha (izquierda) *si*

$$\nu(v) = v \otimes 1 \ (\nu(v) = 1 \otimes v).$$

Denotaremos con V^{coH} (${}^{coH}V$) al conjunto de elementos H-coinvariantes a derecha (izquierda) de V.

Definición 2.30. *Sea V un H-módulo a izquierda (derecha) estándar con acción ρ. Decimos que $v \in V$ es* H-invariante a izquierda (derecha) *si*

$$\rho(h \otimes v) = \epsilon(h)v \ (\rho(v \otimes h) = \epsilon(h)v) \text{ para todo } h \in H.$$

Designamos con ${}^{H}V$ (V^{H}) al conjunto de H-invariantes a izquierda (derecha) de V.

Proposición 2.31. *Para cada H-módulo a izquierda (V, s) es cierto que ${}^{H}V = V^{H_c^{\mathrm{op}}}$ (aquí la estructura de H_c^{op}-módulo a derecha sobre V es la inducida por la acción de H_c^{op} sobre (V, s) introducida en la Proposición 2.28).*

Demostración. La dejamos a cargo del lector. □

Proposición 2.32. *Sean (V, s) un H-módulo a izquierda y $\chi\colon H \otimes V \to V \otimes H$ la aplicación*

$$\chi := (\rho \otimes H) \circ (H \otimes s) \circ (\Delta \otimes V).$$

Un elemento de $v \in V$ es H-invariante si y sólo si $\chi(h \otimes v) = s(h \otimes v)$ para todo $h \in H$.

Demostración. Si $\chi(h \otimes v) = s(h \otimes v)$, entonces

$$\rho(h \otimes v) = (V \otimes \epsilon) \circ \chi(h \otimes v) = (V \otimes \epsilon) \circ s(h \otimes v) = \epsilon(h)v.$$

Recíprocamente, si $\rho(h \otimes v) = \epsilon(h)v$ para todo $h \in H$, entonces por la condición (1) de la Observación 2.27 y por el hecho de que $(H \otimes \epsilon) \circ c^{-1} = \epsilon \otimes H$,

$$\begin{aligned} \chi(h \otimes v) &= (\rho \otimes H) \circ (H \otimes s) \circ (\Delta \otimes V)(h \otimes v) \\ &= (\rho \otimes H) \circ (H \otimes s) \circ (c \otimes V) \circ (c^{-1} \otimes V) \circ (\Delta \otimes V)(h \otimes v) \\ &= s \circ (H \otimes \rho) \circ (c^{-1} \otimes V) \circ (\Delta \otimes V)(h \otimes v) \\ &= s(h \otimes v), \end{aligned}$$

para todo $h \in H$. □

Proposición 2.33. *Es cierto que $s(H \otimes {}^{H}V) = {}^{H}V \otimes H$.*

Demostración. Sea $W = {}^{H}V$. Por la condición (1) de la Observación 2.27 y por la definición de ${}^{H}V$, valen las igualdades de la Figura 4. Esto prueba que $s(H \otimes {}^{H}V) \subseteq {}^{H}V \otimes H$. Un argumento

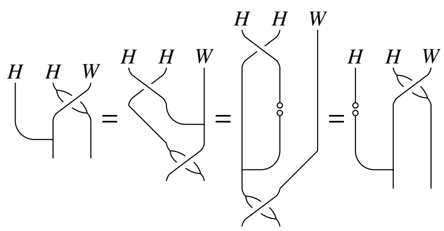


Figura 4

similar, con s reemplazado por s^{-1} muestra que vale la inclusión recíproca. □

Observación 2.34. *Si (V, s) es un H-comódulo a derecha, entonces V^{coH} es estable bajo s (dicho de otro modo, $s(H \otimes V^{coH}) \subseteq V^{coH} \otimes H$). Así, (V^{coH}, s) es un H-espacio trenzado.*

Dados H-comódulos a derecha (V, s_V) y (U, s_U), con coacciones ν_V y ν_U respectivamente, sea $\nu_{V\otimes U}$ la coacción diagonal

$$\nu_{V\otimes U} := (V \otimes U \otimes \mu) \circ (V \otimes s_U \otimes H) \circ (\nu_V \otimes \nu_U).$$

En la siguiente proposición mostraremos en particular que $(V, s_V) \otimes (U, s_U)$ es un H-comódulo a derecha vía $\nu_{V\otimes U}$.

Proposición 2.35. *La categoría $(\mathcal{B}_H)^H$ de H-comódulos a derecha en $\mathcal{B}_H$, provista de las condiciones usuales de asociatividad y de unidad, es monoidal.*

Demostración. Primero notemos que (k, τ), provisto con la coacción trivial, es un H- comódulo. Esta es la unidad de $(\mathcal{B}_H)^H$. A continuación, probaremos que el producto tensorial de dos H-comódulos (V, s_V) y (U, s_U) es un H-comódulo. Es fácil ver que $\nu_{V\otimes U}$ es counitaria. Así que solamente debemos probar que $\nu_{V\otimes U}$ es un morfismo en $\mathcal{B}_H$ y que $\nu_{V\otimes U}$ es coasociativa. La Figura 5, donde la primera igualdad se sigue del hecho de que H es una biálgebra trenzada, la segunda de la

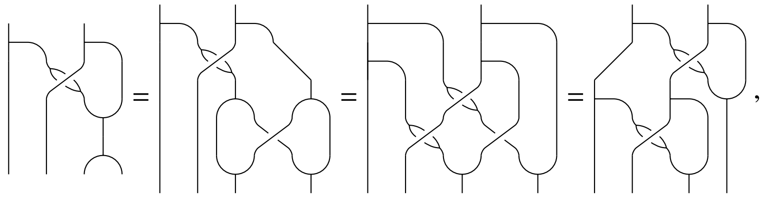


FIGURA 5

compatibilidad de s_U con la comultiplicación de H y la coasociatividad de ν_V y ν_U y la tercera del hecho de que ν_U es un morfismo en $\mathcal{B}_H$, muestra que la segunda afirmación es verdadera. Dejamos la prueba de la primera afirmación al lector. Por último, es claro que las condiciones usuales de asociatividad y la unidad son morfismos en $\mathcal{B}_H$. □

DEFINICIÓN 2.36. *Decimos que (B, s) es un H-comódulo álgebra a derecha si es un álgebra en $(\mathcal{B}_H)^H$.*

Por ejemplo, (k, τ) y (H, c) son H-comódulo álgebras a derecha y $\eta\colon (k, \tau) \to (H, c)$ es un morfismo de H-comódulo álgebras.

OBSERVACIÓN 2.37. *(B, s) es un H-comódulo álgebra a derecha si y sólo si los siguientes hechos valen:*

1. *B es un álgebra y un H-comódulo a derecha,*
2. *s es una transposición a izquierda de H sobre B,*
3. *$(\nu \otimes H) \circ s = (B \otimes c) \circ (s \otimes H) \circ (H \otimes \nu)$,*
4. *$\nu \circ \mu_B = (\mu_B \otimes \mu_H) \circ (B \otimes s \otimes H) \circ (\nu \otimes \nu)$,*
5. *$\nu(1_B) = 1_B \otimes 1_H$,*

donde ν denota a la coacción de H sobre B. Dicho de otro modo, un H-comódulo a derecha (B, s) es un H-comódulo álgebra a derecha si y sólo si B es un álgebra, s es una transposición y la coacción $\nu\colon B \to B \otimes_s H$ es un morfismo de álgebras, donde $B \otimes_s H$ es el álgebra mencionada en el Ejemplo 1.6.

El siguiente resultado será usado en una sección posterior para probar que un producto cruzado $B\#_f H$ con cociclo inversible es un B- módulo libre a derecha. Asumamos que H es una biálgebra trenzada. Sea

$$s\colon H \otimes B \longrightarrow B \otimes H$$

una transposición. Por las Observaciones 1.16 y 2.5, sabemos que $\widetilde{H_c^{\mathrm{cop}}}$ es una biálgebra trenzada con trenza $\widetilde{c^{-1}} = \tau \circ c^{-1} \circ \tau$. Sea

$$\widetilde{s^{-1}}\colon \widetilde{H_c^{\mathrm{cop}}} \otimes B^{\mathrm{op}} \longrightarrow B^{\mathrm{op}} \otimes \widetilde{H_c^{\mathrm{cop}}}$$

la transposición $\widetilde{s^{-1}} = \tau \circ s^{-1} \circ \tau$ introducida en la Observación 2.5.

PROPOSICIÓN 2.38. *Si (B, s) es un H-comódulo álgebra a derecha con coacción ν, entonces $(B^{\mathrm{op}}, \widetilde{s^{-1}})$ es un $\widetilde{H_c^{\mathrm{cop}}}$-comódulo algebra a derecha con coacción $\widetilde{\nu} := \tau \circ s^{-1} \circ \nu$.*

DEMOSTRACIÓN. La coasociatividad de $\tilde{\nu}$ está probada en la Figura 6, donde la segunda igualdad es consecuencia de que ν es una coacción compatible con s^{-1}, la cuarta de la compatibilidad de s^{-1} con c^{-1} y la quinta de la compatibilidad de Δ con s^{-1}. Por otro lado, la Figura 7 en la que la primera igualdad se sigue del hecho de que $\nu\colon B \longrightarrow B \otimes_s H$ es un morfismo de álgebras, la

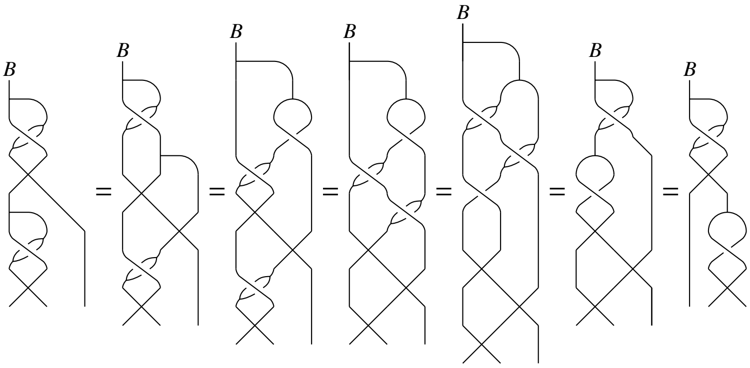


Figura 6

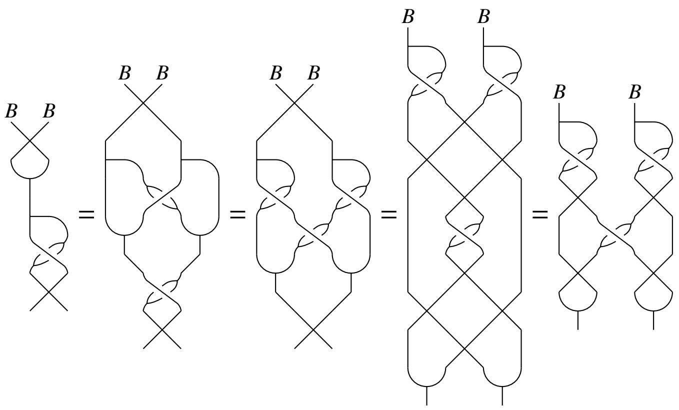


Figura 7

segunda de la compatibilidad de s^{-1} con μ_B y μ_H y las restantes pueden chequearse fácilmente, prueba que

$$\tilde{\nu}\colon B^{\mathrm{op}} \longrightarrow B^{\mathrm{op}} \otimes_{\widetilde{s^{-1}}} \widetilde{H^{\mathrm{cop}}}$$

es un morfismo de álgebras. Para terminar la demostración, debemos verificar que

$$(\tilde{\nu} \otimes H) \circ \widetilde{s^{-1}} = (B \otimes \widetilde{c^{-1}}) \circ (\widetilde{s^{-1}} \otimes H) \circ (H \otimes \tilde{\nu}).$$

Por la definición de $\tilde{\nu}$ y $\widetilde{s^{-1}}$, para ello es suficiente comprobar el diagrama de la Figura 8 conmuta, where $c_{\mathrm{trans}}^{-1} := (H \otimes \tau) \circ (\tau \otimes B) \circ (c^{-1} \otimes B)$ y $\widetilde{c^{-1}} := \tau \circ c^{-1} \circ \tau$, lo que se sigue del hecho de que cada uno de los diagramas pequeños conmuta. □

Dados dos H-módulos a derecha (V, s_V) y (U, s_U) con acciones ρ_V y ρ_U respectivamnente, sea $\rho_{V\otimes U}$ la acción diagonal

$$\rho_{V\otimes U} := (\rho_V \otimes \rho_U) \circ (H \otimes s_V \otimes U) \circ (\Delta \otimes V \otimes U).$$

En la siguiente proposición mostramos en particular que $(V, s_V) \otimes (U, s_U)$ es un H-módulo a izquierda vía $\rho_{V\otimes U}$.

Proposición 2.39. *La categoría $_H(\mathcal{B}_H)$ de H-módulos a izquierda en $\mathcal{B}_H$, provista con las restricciones habituales de asociatividad y unidad, es monoidal.*

Demostración. Es similar a la prueba de la Proposición 2.35. □

$$
\begin{tikzcd}
H\otimes B \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "H\otimes\nu"] & B\otimes H \arrow[r, "s^{-1}"] \arrow[d, "\nu\otimes H"] & H\otimes B \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "H\otimes\nu"] & B\otimes H \arrow[d, "\nu\otimes H"] \\
H\otimes B\otimes H \arrow[r, "(B\otimes\tau)\circ(\tau\otimes H)"] \arrow[d, "H\otimes s^{-1}"] & B\otimes H^2 \arrow[r, "(s^{-1}\otimes H)\circ(B\otimes c^{-1})"] \arrow[d, "s^{-1}\otimes H"] & H\otimes B\otimes H \arrow[r, "(B\otimes\tau)\circ(\tau\otimes H)"] \arrow[d, "(c\otimes B)\circ(H\otimes s^{-1})"] & B\otimes H^2 \arrow[d, "s^{-1}\otimes H"] \\
H^2\otimes B \arrow[r, "(H\otimes\tau)\circ(\tau\otimes B)"] \arrow[d, "H\otimes\tau"] & H\otimes B\otimes H \arrow[r, "H\otimes s^{-1}"] \arrow[d, "(B\otimes\tau)\circ(\tau\otimes H)"] & H^2\otimes B \arrow[r, "c_{\mathrm{trans}}^{-1}"] \arrow[d, "(H\otimes\tau)\circ(\tau\otimes B)"] & H\otimes B\otimes H \arrow[d, "\tau\otimes H"] \\
H\otimes B\otimes H \arrow[r, "\tau\otimes H"] & B\otimes H^2 \arrow[r, "s^{-1}\otimes H"] & H\otimes B\otimes H \arrow[r, "(B\otimes\widetilde{c^{-1}})\circ(\tau\otimes H)"] & B\otimes H^2
\end{tikzcd}
$$

Figura 8

Definición 2.40. *Decimos que (A, s) es un H-módulo álgebra a izquierda si es un álgebra en ${}_H(\mathcal{B}_{\mathcal{H}})$.*

Se comprueba fácilmente que (A, s) es un H-módulo álgebra a izquierda si y sólo si (A, s) es un H-módulo a izquierda, A un álgebra, s es compatible con la estructura de álgebra de A y la acción $\rho\colon H \otimes A \to A$ satisface que

1. $\rho(h \otimes 1) = \epsilon(h)1$,
2. $\rho \circ (H \otimes \mu) = \mu \circ (\rho \otimes \rho) \circ (H \otimes s \otimes A) \circ (\Delta \otimes A \otimes A)$.

Observemos que si (A, s) es un H-módulo algebra, entonces s es una transposición.

Observación 2.41. *Una función $f\colon (A, s) \to (A', s')$ es un morfismo de H-módulos álgebra a izquierda si y sólo si es un morfismo de H-módulos y de álgebras. Una afirmación similar vale para morfismos de H-comódulos álgebra a derecha.*

Sean A un álgebra y $s\colon A \otimes H \longrightarrow H \otimes A$ una transposición a derecha. Las nociones de H-comódulo álgebra a izquierda y de H-módulo álgebra a derecha se introducen de un modo análogo.

Proposición 2.42. *Sean H una biálgebra trenzada. Un H-álgebra trenzada a izquierda (A, s) es un H-módulo algebra vía*

$$\rho\colon H \otimes A \longrightarrow A$$

si y sólo si (A, s^{-1}) es un H_c^{op}-módulo algebra a derecha vía $\rho \circ s^{-1}$. Análogamente, (A, s) es un H-comódulo algebra a derecha vía

$$\nu\colon A \longrightarrow A \otimes H$$

si y sólo si (A, s^{-1}) es un H_c^{cop}-comódulo algebra a derecha vía $s^{-1} \circ \nu$.

Demostración. De la Proposición 2.28 y la Observación 2.5 se sigue inmediatamente que para verificar la primera afirmación es suficiente mostrar que ρ satisface las condiciones 1) y 2) de los comentarios que siguen a la Definición 2.40 si y sólo si $\rho \circ s^{-1}$ satisface las versiones a derecha de estas, lo que puede hacerse fácilmente. La segunda afirmación se prueba de un modo similar. □

3. Acciones débiles y productos semidirectos

Sean H una biálgebra trenzada, A un álgebra y $s\colon H \otimes A \longrightarrow A \otimes H$ una transposición. En esta sección generalizamos el concepto clásico de producto semidirecto $A\#H$ a nuestro contexto. La aplicación torcida χ involucrada en la construcción de estos productos semidirectos tienen la forma

$$\chi = (\rho \otimes H) \circ (H \otimes s) \circ (\Delta \otimes A),$$

donde ρ es una aplicación de $H \otimes A$ en A. Por lo tanto, comenzamos determinando las hipótesis que χ debe satisfacer para que la aplicación ρ exista. Notemos que en este caso, ρ está unívocamente determinada por la fórmula

$$\rho = (A \otimes \epsilon) \circ \chi.$$

La Proposición 2.43, el Teorema 2.47 y las Proposiciones 2.48 y 2.49, son generalizaciones directas de la Proposición 3.2, Teorema 3.4, Lema 3.5 y Proposición 3.6 de [**17**], respectivamente. Todas las pruebas dadas en ese trabajo funcionan en nuestro contexto.

Proposición 2.43. *Sea $\chi\colon H \otimes A \longrightarrow A \otimes H$ una aplicación. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *Existe una aplicación $\rho\colon H \otimes A \longrightarrow A$ tal que $\chi = (\rho \otimes H) \circ (H \otimes s) \circ (\Delta \otimes A)$.*
2. $(\chi \otimes H) \circ (H \otimes s) \circ (\Delta \otimes A) = (A \otimes \Delta) \circ \chi$.

Demostración. Es fácil ver que si vale 2), la función $\rho := (A \otimes \epsilon) \circ \chi$ satisface la condición requerida en 1). Recíprocamente, si 1) vale, en tonces las igualdades de la Figura 9, son verdaderas.

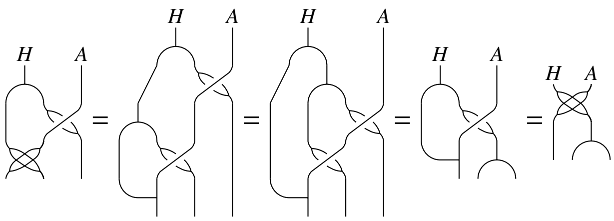


Figura 9

Esto prueba que la condición pedida en el item 2) se cumple. □

Definición 2.44. *Un objeto (V, s) en $\mathcal{B}_H$, provisto de una aplicación $\rho\colon H \otimes V \longrightarrow V$, es un* H-módulo débil a izquierda en $\mathcal{B}_H$*, o simplemente un H-módulo débil a izquierda, si:*

1. *$\rho(1 \otimes v) = v$ para todo $v \in V$,*
2. *$s \circ (H \otimes \rho) = (\rho \otimes H) \circ (H \otimes s) \circ (c \otimes V)$.*

La categoría ${}_{wH}(\mathcal{B}_H)$, de H-módulos débiles a izquierda en $\mathcal{B}_H$, deviene una categoría monoidal del mismo modo que ${}_H(\mathcal{B}_H)$. Un H-módulo álgebra débil a izquierda es, por definición, un álgebra en esta categoría.

Observación 2.45. *(A, s) es un H-módulo álgebra débil si y sólo si A es un álgebra usual, s es una transposición de H en A y la aplicación ρ satisface las siguientes propiedades:*

1. *$\rho \circ (H \otimes \mu) = \mu \circ (\rho \otimes \rho) \circ (H \otimes s \otimes A) \circ (\Delta \otimes A \otimes A)$,*

2. $\rho(h \otimes 1) = \epsilon(h)1$, *para todo* $h \in H$,
3. $\rho(1 \otimes a) = a$, *para todo* $a \in A$,
4. $s \circ (H \otimes \rho) = (\rho \otimes H) \circ (H \otimes s) \circ (c \otimes A)$.

Definición 2.46. *Sean A un álgebra y $s\colon H \otimes A \longrightarrow A \otimes H$ una transposición. Una aplicación $\rho\colon H \otimes A \to A$ es una s-*acción débil* de H *sobre* A *si satisface las condiciones de la observación. Una s-*acción* *es una s-acción débil que satisface*

5. $\rho \circ (H \otimes \rho) = \rho \circ (\mu \otimes A)$ *(asociatividad de la acción).*

Notemos que (A, s) es un álgebra en ${}_H(B_H)$ vía $\rho\colon H \otimes A \to A$ si y sólo si A es un álgebra usual, s es una transposición de H en A y ρ es una s-acción de H en A.

Teorema 2.47. *Sea $\rho\colon H \otimes A \to A$ una función. La aplicación*

$$\chi\colon H \otimes A \longrightarrow A \otimes H,$$

definida por

$$\chi := (\rho \otimes H) \circ (H \otimes s) \circ (\Delta \otimes A),$$

es una aplicación torcida de H sobre A si y sólo si ρ satisface las primeras tres condiciones de la Observación 2.45. Más precisamente, la condición (1) se cumple si y sólo si χ es compatible con μ, la condición (2) si y sólo si $\chi(h \otimes 1) = 1 \otimes h$ para todo $h \in H$, y la condición (3) si y sólo si $\chi(1 \otimes a) = a \otimes 1$ para todo $a \in A$.

Demostración. Supongamos que

$$\chi \circ (H \otimes \mu_A) = (\mu_A \otimes H) \circ (A \otimes \chi) \circ (\chi \otimes A).$$

La Figura 10, donde la primera y tercera igualdades valen porque $\rho = (A \otimes \epsilon) \circ \chi$, la segunda

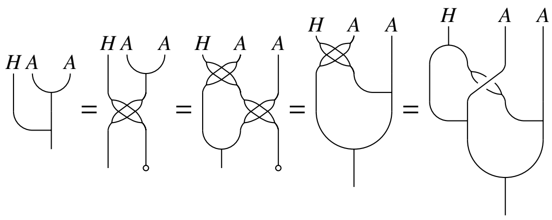


Figura 10

se sigue de la hipótesis y la cuarta se obtiene reemplazando $(\rho \otimes H) \circ (H \otimes s) \circ (\Delta \otimes A)$ por χ, muestra que ρ satisface la condición 1) de la Observación 2.45. Recíprocamente, si se cumple esta condción, entonces la Figura 11, donde la primera igualdad se sigue de la compatibilidad de s con μ_A, la segunda de la hipótesis y la tercera de la coasociatividad de Δ y la compatibilidad de s con Δ, prueba que

$$\chi \circ (H \otimes \mu_A) = (\mu_A \otimes H) \circ (A \otimes \chi) \circ (\chi \otimes A).$$

Resta verificar que $\chi(h \otimes 1) = 1 \otimes h$ si y sólo si $\rho(h \otimes 1) = \epsilon(h)1$ y que $\chi(1 \otimes a) = a \otimes 1$ si y sólo si $\rho(1 \otimes a) = a$. Dejamos esta tarea al lector. □

En el resto de esta sección $\chi\colon H \otimes A \longrightarrow A \otimes H$ denota a la aplicación torcida asociada a una s-acción débil $\rho\colon H \otimes A \longrightarrow A$. Notemos que χ es un morfismo en $\mathcal{B}_H$, dado que por el item (4) de la Observación 2.45, lo es ρ.

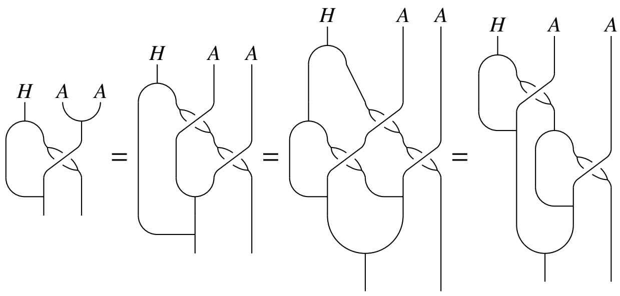


Figura 11

Proposición 2.48. *Sea $T\colon H^2 \otimes A \longrightarrow H^2 \otimes A \otimes H^2$ la función definida por*

$$T := (H^2 \otimes s \otimes H) \circ (H^3 \otimes s) \circ (\Delta_{H \otimes^c H} \otimes A).$$

La aplicación torcida χ satisface:

$$(\chi \otimes H) \circ (H \otimes \chi) = (\rho \otimes H^2) \circ (H \otimes \rho \otimes H^2) \circ T$$

y

$$\chi \circ (\mu \otimes A) = (\rho \otimes \mu) \circ (\mu \otimes A \otimes H^2) \circ T.$$

Demostración. La primera afirmación se deduce de la Figura 12, donde la primera igualdad

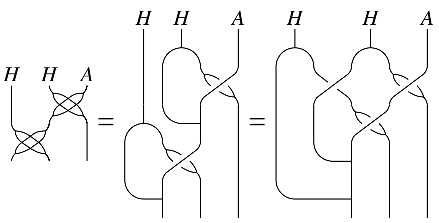


Figura 12

vale porque χ es la aplicación torcida asociada a ρ y la segunda por la condición 4) de la Observación 2.45. La segunda afirmación es cierta por la validez de la Figura 13, donde la primera

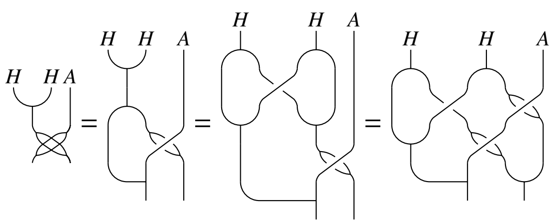


Figura 13

igualdad se sigue del hecho de que χ es la aplicación torcida asociada a ρ, la segunda del hecho de que Δ es un morfismo de álgebras, y la tercera de la compatibilidad de s con μ_H. □

Proposición 2.49. *La función ρ es una s-acción si y sólo si la aplicación torcida χ satisface la ecuación*

$$\chi \circ (\mu \otimes A) = (A \otimes \mu) \circ (\chi \otimes H) \circ (H \otimes \chi).$$

Por lo tanto, si ρ es una s-acción, entonces (H, A, χ) es un par apareado de álgebras en $\mathcal{B}_H$.

Demostración. Supongamos que ρ es una s-acción. Por la Figura 14 (donde la primera igual-

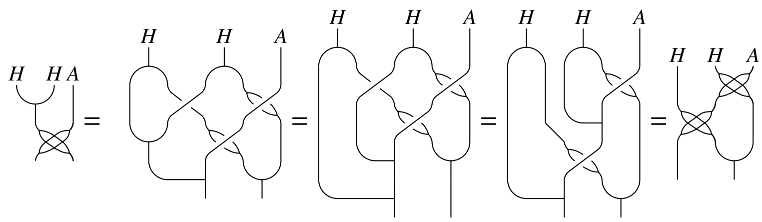


Figura 14

dad vale por la proposición anterior, la segunda por la hipótesis sobre ρ, la tercera por la condición 4) de la Observación 2.45 y la cuarta por del hecho de que χ es la aplicación torcida asociada a ρ) es cierto que

$$\chi \circ (\mu \otimes A) = (A \otimes \mu) \circ (\chi \otimes H) \circ (H \otimes \chi).$$

Recíprocamente, supongamos que vale esta igualdad. Por la Figura 15 (donde la primera igualdad

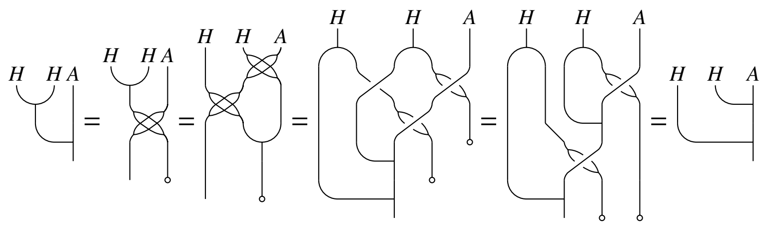


Figura 15

vale debido a que $\rho = (A \otimes \epsilon) \circ \chi$, la segunda por la hipótesis sobre χ, la tercera por la proposición anterior y la cuarta por la condición 4) de la Observación 2.45) es verdad que ρ es una s-acción. □

Observación 2.50. *Sea H un álgebra de Hopf trenzada con antípoda S. Si ρ es una s-acción, entonces s está unívocamente determinada por la fórmula*

$$s = (\rho \otimes H) \circ (S \otimes \chi) \circ (\Delta \otimes A),$$

como queda claro por las igualdades de la Figura 16.

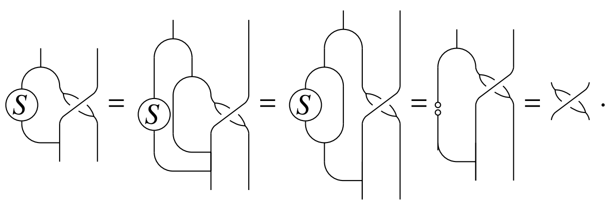


Figura 16

Definición 2.51. *Sea $\rho\colon H \otimes A \to A$ una s-acción. Definimos el* producto semidirecto $A\#H$, de A con H asociado a ρ, *como el producto tensorial torcido asociado al par apareado (H, A, χ) de álgebras.*

Por la Proposición 2.49 y los comentarios hechos en el Ejemplo 1.6, sabemos que $A\#H$ es un álgebra asociativa con identidad $1\#1$. Es fácil ver que

$$A \simeq A\#1 \quad \text{y} \quad H \simeq 1\#H.$$

Por esta razón frecuentemente escribiremos ah en lugar de $a\#h$.

Observación 2.52. *Cuando ρ es la acción trivial $h \otimes a \mapsto \epsilon(h)a$, entonces el álgebra $A\#H$ introducida en la Definición 2.51 se llama el producto tensorial torcido por s de A con H, y se denota por $A \otimes_s H$. Esta notación es coherente con la usada en la Observación 1.15.*

Lema 2.53. *Sea H un álgebra de Hopf trenzada con antípoda biyectiva S, y sea $\bar{S}$ la inversa de S respecto de la composición. Entonces*

$$(\mu \otimes H) \circ (H \otimes c) \circ (\Delta \otimes \bar{S}) \circ c^{-1} \circ \Delta = (\eta \circ \epsilon \otimes H) \circ \Delta$$

y

$$(H \otimes \mu) \circ (H \otimes \bar{S} \otimes H) \circ (c^{-1} \otimes H) \circ (\Delta \otimes H) \circ c^{-1} \circ \Delta = (H \otimes \eta \circ \epsilon) \circ \Delta.$$

Demostración. De la igualdad

$$\Delta \circ S = c \circ (S \otimes S) \circ \Delta$$

se sigue que

$$\mu(H \otimes \bar{S}) \circ c^{-1} \circ \Delta = \mu \circ (\bar{S} \otimes H) \circ c^{-1} \circ \Delta = \eta \circ \epsilon.$$

Usando esto, la compatibilidad de c^{-1} con Δ, la coasociatividad de Δ con $c^{-1} \circ \Delta$ y el hecho de que c conmuta con S, obtenemos las igualdades representadas en las Figuras 17 y 18, que establecen

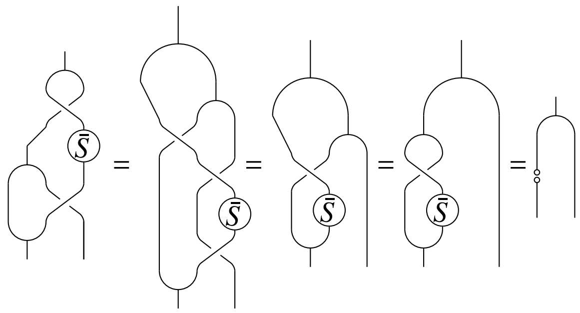


Figura 17

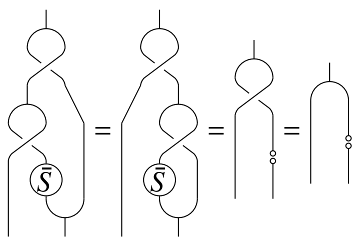


Figura 18

lo que queríamos probar. □

Proposición 2.54. *Sean H un álgebra de Hopf trenzada, $s\colon H\otimes A \longrightarrow A\otimes H$ una transposición, ρ una s-acción y $A\#H$ el correspondiente producto semidirecto. Si la antípoda S es biyectiva, entonces la aplicación*

$$\theta\colon H\otimes A \longrightarrow A\#H,$$

definida por $\theta(h\otimes a) = ha$, es un isomorfismo de A-módulos a derecha. Consecuentemente, $A\#H$ es un A-módulo a derecha libre.

Demostración. Sea $\bar{S}$ la inversa por la composición de S. Las igualdades de las Figuras 19 y 20, que son verdaderas por las condiciones (3) y (4) de la Observación 2.45, la asociatividad de

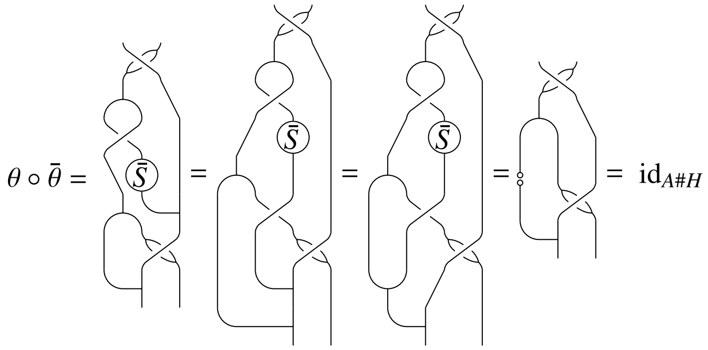


Figura 19

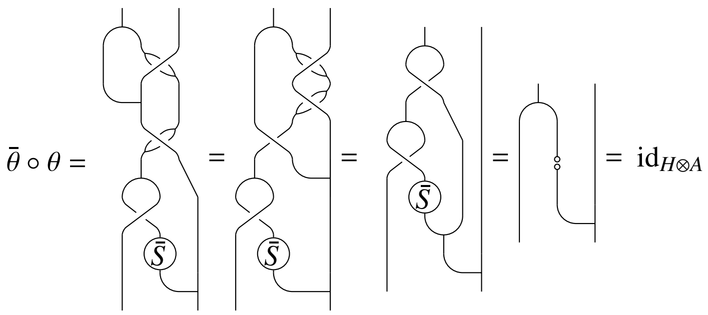


Figura 20

la acción, y el Lema 2.53, muestran que

$$\bar{\theta} := (H\otimes\rho)\circ(H\otimes\bar{S}\otimes A)\circ(c^{-1}\otimes A)\circ(\Delta\otimes A)\circ s^{-1}$$

es la inversa de θ. □

4. El anillo de H-invariantes

Sean H una biálgebra trenzada, A un álgebra, $s\colon H\otimes A \longrightarrow A\otimes H$ una transposición, ρ una s-acción de H en A y χ la aplicación torcida asociada a ρ. En esta sección definiremos y estudiaremos la subálgebra de H-invariantes de A por la acción a izquierda ρ.

Definición 2.55. *Un elemento $a\in A$ es H-*invariante* por ρ si $\rho(h\otimes a) = \epsilon(h)a$ para todo $h\in H$. Denotamos con ${}^{H}\!A$ al subconjunto de A formado por los elementos H-invariantes.*

Proposición 2.56. *Un elemento de $a \in A$ es H-invariante si y sólo si $\chi(h \otimes a) = s(h \otimes a)$ para todo $h \in H$.*

Demostración. Es una consecuencia inmediata de la Proposición 2.32 □

Proposición 2.57. *${}^{H}\!A$ es una subálgebra de A.*

Demostración. Es claro que $1 \in {}^{H}\!A$, y que ${}^{H}\!A$ es cerrada bajo sumas y multiplicación por escalares. Las igualdades de la Figura 21, donde $B = {}^{H}\!A$, muestran que también es cerrada bajo

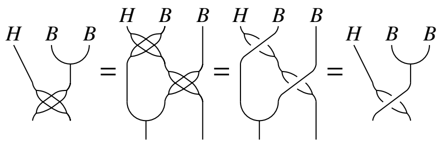


Figura 21

multiplicación. □

Proposición 2.58. *Es cierto que $s(H \otimes {}^{H}\!A) = {}^{H}\!A \otimes H$. Por lo tanto, la aplicación $g_s \colon A \to A$, introducida en el Teorema 2.20, cumple que $g_s({}^{H}\!A) \subseteq {}^{H}\!A$.*

Demostración. Es una consecuencia inmediata de la Proposición 2.33. □

Proposición 2.59. *Sean H un álgebra de Hopf rígida y (A, s) un H-módulo álgebra a izquierda. El automorfismo $g_s \colon A \to A$ del Teorema 2.20 satisface que $g_s({}^{H}\!A) = {}^{H}\!A$.*

Demostración. Por el Teorema 2.20 y la Observación 2.5, la aplicación

$$s\colon kt \otimes A \longrightarrow A \otimes kt$$

es biyectiva; por lo tanto, por el Teorema 2.33 la aplicación

$$s\colon kt \otimes {}^{H}\!A \longrightarrow {}^{H}\!A \otimes kt$$

también lo es. La proposición se sigue inmediatamente de este hecho. □

Lema 2.60. *Asumamos que H es un álgebra de Hopf trenzada rígida. Sea $t \in \int_H^l$. La aplicación $\widehat{t}\colon A \to A$, dada por $\widehat{t}(a) = t \cdot a$, es un morfismo de ${}^{H}\!A$-módulos a derecha con valores en ${}^{H}\!A$, donde el punto denota la s-acción. Además,*

$$t \cdot (ab) = g_s(a)(t \cdot b) \quad \textit{para todo } a \in {}^{H}\!A \textit{ y } b \in A,$$

donde $g_s \colon A \to A$ es la aplicación introducida en el Teorema 2.20.

Demostración. Para cada $h \in H$ y $a \in A$, escribamos

$$s(h \otimes a) = \sum_i a_i \otimes h_i.$$

Por la asociatividad de la acción y el hecho de que $t \in \int_H^l$, sabemos que

$$h \cdot (t \cdot a) = (ht) \cdot a = \epsilon(h)(t \cdot a) \quad \text{para todo } h \in H \text{ y } a \in A.$$

en consecuencia, la imagen de $\widehat{t}$ está incluida en ${}^{H}\!A$. Fijemos $a \in A$ y $b \in {}^{H}\!A$. Por el ítem (1) de la Observación 2.45, el hecho de que $b \in {}^{H}\!A$ y la compatibilidad de s con ϵ,

$$t \cdot (ab) = \sum_i (t_{(1)} \cdot a_i)(t_{(2)_i} \cdot b) = (t_{(1)}\epsilon(t_{(2)_i}) \cdot a)b = (t \cdot a)b.$$

La prueba de la última afirmación es similar. □

Definición 2.61. *La aplicación* $\widehat{t}\colon A \to {}^{H}\!A$ *del Lema 2.60 se llama una* función traza a izquierda *para H sobre A.*

Los ítems (1),(2),(3) y (4) del Teorema 2.62 generalizan el Lema 4.3.4, Corolario 4.3.5, Teorema 4.3.7 y Teorema 4.4.2 de [**26**], respectivamente. Todas las demostraciones dadas allí, excepto la del Lema 4.4.3, funcionan en nuestro contexto. El único punto que requiere alguna atención especial es el hecho de que la aplicación

$$\mu\colon \mathcal{L}(W_{A\#H}) \longrightarrow \mathcal{L}(V_{{}^{H}\!A})$$

de la página 49 de [**26**] es ${}^{H}\!A$-lineal. Verifiquemos esto. Sean $v \in V$, $h \in H$ y $a \in {}^{H}\!A$. Como

$$\chi(h \otimes a) = s(h \otimes a) \qquad \text{y} \qquad (A \otimes \epsilon) \circ s = \epsilon \otimes A,$$

tenemos que

$$\begin{aligned}\mu(v \otimes_A ha) &= \mu(v \otimes_A s(h \otimes a))\\ &= v \otimes_A (A \otimes \epsilon)(s(h \otimes a))\\ &= v \otimes_A (\epsilon \otimes A)(h \otimes a)\\ &= \epsilon(h)va\\ &= \mu(v \otimes h)a,\end{aligned}$$

como deseamos.

Teorema 2.62. *Asumamos que H es un álgebra de Hopf trenzada rígida y que $\widehat{t}\colon A \to {}^{H}\!A$ es sobreyectiva. Sea $c \in A$ tal que $t \cdot c = 1$. Los siguientes hechos se satisfacen:*

1. *$e = tc$ es un idempotente de $A\#H$ que satisface que $e(A\#H)e = {}^{H}\!Ae \simeq {}^{H}\!A$.*
2. *Si A es noetheriana a izquierda, entonces también lo es ${}^{H}\!A$.*
3. *Si A es noetheriana a derecha, también lo es ${}^{H}\!A$.*
4. *Si A es noetheriana a izquierda y finitamente generada como k-álgebra, entonces ${}^{H}\!A$ es finitamente generada como k-álgebra.*
5. *Si A es noetheriana a derecha y finitamente generada como k-álgebra, entonces ${}^{H}\!A$ es finitamente generada como k-álgebra.*
6. *Si A es noetheriana a derecha, entonces A es un ${}^{H}\!A$-módulo noetheriano a derecha.*

Demostración. 1) Primero observemos que para $h \in H$, $a \in A$ y $t \in \int_H^l$, en $A\#H$ vale la igualdad

$$hat = (h \cdot a)t.$$

Esto es cierto porque

$$(1\#h)(a\#t) = \sum_{(h),i} (h_{(1)} \cdot a_i)\#h_{(2)_i}t = \sum_{(h)} (h_{(1)} \cdot a_i)\#\epsilon(h_{(2)_i})t = (h \cdot a)t.$$

donde $s(h \otimes a) = \sum_i a_i \otimes h_i$. Dado que $\hat{t}$ es sobreyectiva, existe $c \in A$ tal que $t \cdot c = 1$. Definimos $e = tc$. Un cálculo directo muestra que

$$e^2 = tctc = (t \cdot c)tc = tc = e.$$

Entonces, para cada $a \in a$ y $h \in h$, tenemos que

$$e(ah)e = tcahtc = \epsilon(h)tcatc = \epsilon(h)t \cdot (ca)tc \in {}^{H}\!Ae.$$

Recíprocamente, si $a \in {}^{H}\!A$, entonces

$$t \cdot (ca) = (t \cdot c)a = a,$$

y de aquí resulta que

$$ae = atc = tcatc.$$

Es decir, $e(A\#H)e = {}^{H}Ae$. Finalmente, ésta es isomorfa como álgebra a ${}^{H}A$, puesto que

$$(ae)(be) = atcbtc = abe,$$

como se probó antes.

2) Si A es noetheriana a izquierda, entonces también lo es $A\#H$. Además, para todo anillo noetheriano S se cumple que eSe también lo es, y gracias al ítem 1) llegamos a la conclusión deseada.

3) Si A es noetheriana a derecha, entonces lo es $H \otimes A$, y por la Proposición 2.54, también lo es $A\#H$. Razonando ahora como en la demostración del item 2) probamos que vale 3).

4) Notemos primero que $A\#H$ es noetheriana a izquierda, porque es un A-módulo finito. Por lo tanto $(A\#H)e(A\#H)$ es un ideal a izquierda finitamente generado de $A\#H$. Afirmamos que $e(A\#H)$ es finitamente generado a izquierda sobre $e(A\#H)e$. En efecto, escribamos

$$S := A\#H \qquad \text{y} \qquad SeS = \sum_{i=1}^{n} Sx_i,$$

donde $x_i = \sum_j v_{i,j}ew_{i,j}$. Elijamos un $r \in S$. Entonces $er \in e(SeS)$ y, por lo tanto,

$$er = e\sum_i s_i x_i = \sum_{i,j} es_i v_{i,j} ew_{i,j}.$$

En consecuencia el conjunto $\{ew_{i,j}\}$ genera eS como un eSe-módulo, con lo cual queda probada la afirmación. Por simplicidad, reescribiremos estos generadores como $\{ew_i\}$.

Dado que A es finitamente generado como k-álgebra, S también lo es. Sea $\{t_j : j \in J\}$ un conjunto finito de generadores. Escribimos

$$et_j = \sum_i ey_{i,j}ew_i \quad \text{y} \quad ew_k t_j = \sum_i ez_{i,j,k}ew_i.$$

El conjunto $\{ew_i e, ey_{ij}e, ez_{ijk}e\}$ genera eSe como k-álgebra, puesto que cada elemento de eSe es una combinación lineal de elementos de la forma

$$et_{j_1}t_{j_2}\dots t_{j_m}e,$$

y no es difícil ver que cada uno de estos elementos pueden ser expresados en términos de los generadores dados. Por ejemplo:

$$et_1t_2e = (\sum_i ey_{i1}ew_i)t_2e = \sum_i ey_{i1}e(\sum_m ez_{m2i}ew_m)e.$$

5) Razonando como en la demostración del ítem 3), obtenemos que $A\#H$ es noetheriana a derecha. Partiendo de este hecho y haciendo cuentas análogas a las usadas en la demostración del ítem 4), llegamos a la conclusión deseada.

6) Sean e el idempotente del ítem 1) y $\{h_1, \cdots, h_n\}$ una base de H. Para todo A-módulo a derecha V consideremos el $A\#H$-módulo a derecha inducido

$$W := V \otimes_A (A\#H).$$

Compararemos el reticulado de ${}^{H}A$-submódulos de V, denotado por $\mathcal{L}(V_{{}^{H}A})$, con el retículado $\mathcal{L}(W_{A\#H})$, de $A\#H$-submódulos de W. Definamos

$$\sigma\colon \mathcal{L}(V_{{}^{H}A}) \to \mathcal{L}(W_{A\#H}) \quad \text{por} \quad U \mapsto (U \otimes e)(A\#H)$$

y

$$\mu\colon \mathcal{L}(W_{A\#H}) \to \mathcal{L}(V_{{}^{H}A}) \quad \text{por} \quad \sum_i v_i \otimes_A h_i \mapsto \sum_i \epsilon(h_i)v_i,$$

La aplicación μ está bien definida porque cada $w \in W$ tiene una única representación de la forma $w = \sum_i v_i \otimes_A h_i$. Verifiquemos ahora que μ es una aplicación ${}^H\!A$-lineal. Sean $v \in V, h \in H$ y $a \in {}^H\!A$. Como

$$\chi(h \otimes a) = s(h \otimes a) \qquad \text{y} \qquad (A \otimes \epsilon) \circ s = \epsilon \otimes A,$$

es cierto que

$$\begin{aligned}\mu(v \otimes_A ha) &= \mu(v \otimes_A s(h \otimes a))\\ &= v \otimes_A (A \otimes \epsilon)(s(h \otimes a))\\ &= v \otimes_A (\epsilon \otimes A)(h \otimes a)\\ &= \epsilon(h)va = \mu(v \otimes h)a,\end{aligned}$$

como deseamos. Claramente tanto σ como μ preservan inclusiones. Afirmamos que para todo $U \in \mathcal{L}(V_{{}^H\!A})$, vale la igualdad $U^{\sigma\mu} = U$, lo que en particular probará que σ es una función inyectiva de $\mathcal{L}(V_{{}^H\!A})$ en $\mathcal{L}(W_{A\#H})$. Para probar la afirmación, primero observemos que si $v \otimes e = 0$, entonces

$$v \otimes et = v \otimes t = 0$$

y, por lo tanto, $v = 0$. En consecuencia, si

$$v_1 \otimes e = v_2 \otimes e,$$

entonces $v_1 = v_2$. Por otra parte, para todo

$$w = \sum_i v_i \otimes h_i \in W,$$

vale que

$$we = \sum_i v_i \otimes h_i tc = \sum_i v_i \otimes \epsilon(h_i)tc = \sum_i \epsilon(h_i)v_i \otimes tc = \mu(w) \otimes e.$$

Además, gracias al ítem 1), para $U \in \mathcal{L}(V_{{}^H\!A})$, tenemos

$$U^\sigma e = U \otimes e(A\#H)e = U \otimes {}^H\!Ae = U \otimes e.$$

Combinando estos hechos vemos que para cada $w \in U^\sigma$,

$$we = \mu(w) \otimes e \in U \otimes e,$$

y en consecuencia $\mu(w) \in U$. Es decir que $U^{\sigma\mu} \subseteq U$. Veamos ahora que vale la inclusión opuesta. Si $u \in U$, entonces $w := u \otimes e \in U^\sigma$, por lo que debido a la cuenta anterior sabemos que

$$u \otimes e = we = \mu(w) \otimes e.$$

De aquí se sigue que $u = \mu(w)$ y así resulta que $U = U^{\sigma\mu}$, como queremos. Aplicando ésto al caso $V = A$, obtenemos que

$$W = A \otimes_A A\#H \simeq A\#H.$$

Como $A\#H \simeq H \otimes A$ como A-módulos a derecha, y estamos suponiendo que A es noetheriana a derecha, se sigue que W es un $A\#H$-módulo noetheriano a derecha. En consecuencia, dado que σ es inyectiva, A es un ${}^H\!A$-módulo noetheriano a derecha. □

Proposición 2.63. *Asumamos que H es un álgebra de Hopf trenzada rígida. Sean t una integral a izquierda no nula de H y $\bar{S}$ la inversa de S bajo composición. Entonces, para todo $a \in A$ y $h \in H$:*

1. *Las igualdades*

$$hat = (h \cdot a)t \qquad y \qquad tah = \sum_i t(\bar{S}(\alpha \rightharpoonup h)_i \cdot a_i),$$

donde $\alpha\colon H \to k$ es la función modular de H y

$$\sum_i \bar{S}(\alpha \rightharpoonup h)_i \otimes a_i = s^{-1}(a \otimes \bar{S}(\alpha \rightharpoonup h)),$$

son verdaderas,

2. *El conjunto AtA es un ideal de A#H.*

Demostración. El segundo ítem se sigue inmediatamente del primero. La primera igualdad del ítem (1) ha sido probada al comienzo de la demostración del teorema anterior. Probaremos la segunda igualdad. Sean $h \in H$ y $a \in A$. Escribamos

$$s^{-1}(a \otimes h) = \sum_i h_i \otimes a_i \qquad \text{y} \qquad c^{-1}(h_{i_{(1)}} \otimes h_{i_{(2)}}) = \sum_j h_{i_{(2)_j}} \otimes h_{i_{(1)_j}}.$$

De la demostración de la Proposición 2.54 se sigue que

$$a\#h = \sum_{i,j} (1\#h_{i_{(2)_j}})(\bar{S}(h_{i_{(1)_j}}) \cdot a_i\#1).$$

Entonces, por el Teorema 1.27

$$\begin{aligned}(1\#t)(a\#h) &= \sum_{i,j}(1\#t)(1\#h_{i_{(2)_j}})(\bar{S}(h_{i_{(1)_j}}) \cdot a_i\#1)\\ &= \sum_{i,j}(1\#\alpha(h_{i_{(2)_j}})t)(\bar{S}(h_{i_{(1)_j}}) \cdot a_i\#1)\\ &= \sum_{i,j}(1\#t)(\bar{S}(h_{i_{(1)}}\alpha(h_{i_{(2)}}) \cdot a_i\#1).\end{aligned}$$

Pongamos

$$(H \otimes s^{-1}) \circ (s^{-1} \otimes H) \circ (A \otimes \Delta)(a \otimes h) = \sum_{i,j} h_{(1)_i} \otimes h_{(2)_j} \otimes a_{ij}.$$

Por la compatibilidad de s con Δ y $\bar{S}$, y la Proposición 2.15,

$$\begin{aligned}(1\#t)(a\#h) &= \sum_{i,j}(1\#t)(\bar{S}(h_{(1)_i}\alpha(h_{(2)_j})) \cdot a_{ij}\#1)\\ &= \sum_{i,j}(1\#t)(\bar{S}(h_{(1)_i}\alpha(h_{(2)})) \cdot a_i\#1)\\ &= \sum_{i,j}(1\#t)(\bar{S}(\alpha \rightharpoonup h)_i \cdot a_i\#1),\end{aligned}$$

como queremos. □

Proposición 2.64. *Asumamos que H es un álgebra de Hopf trenzada rígida. Sea t una integral a izquierda no nula de H. Las siguientes afirmaciones son verdaderas:*

1. *Para cada $a \in A \cap AtA$ existen $b_i, c_i \in A$ ($i = 1, \dots, n$), tales que para todo $d \in A$,*

$$ad = \sum_{i=1}^{n} b_i\widehat{t}(c_i d).$$

Consecuentemente, $aA \subseteq \sum_{i=1}^n b_i{}^HA$.

2. *Si $AtA = A\#H$, entonces A es un ${}^HA$-módulo a derecha finitamente generado.*
3. *Si $A \cap AtA$ contiene un elemento regular de A, entonces A es un ${}^HA$-submódulo a derecha de un ${}^HA$-módulo libre finito.*

Demostración. 1) Escribamos

$$s(h \otimes a) = \sum_j a_j \otimes h_j, \qquad \text{con } h \in H, a \in A.$$

Por hipótesis sabemos que existen $b_i, c_i \in A$ ($i = 1, \dots, n$), tales que $a = \sum_{i=1}^n b_i t c_i \in A$. Entonces

$$ad = \sum_{i=1}^{n} b_i t c_i d = \sum_{i=1}^{n} b_i t_{(1)} \cdot (c_i d)_j \# t_{(2)_j}.$$

Aplicando $\mathrm{id}_A \otimes \epsilon$ a cada miembro de esta igualdad, concluímos que $ad = \sum_{i=1}^n b_i t \cdot (c_i d)$.

2) Apliquese el item anterior con $a = 1$.

3) Sean a un elemento regular en $A \cap AtA$ y $b_i, c_i \in A$ ($i = 1, \dots, n$) como en el ítem 1). Definimos

$$\varphi\colon A \to \bigoplus_{i=1}^{n} {}^HA$$

por $\varphi(d) := (\widehat{t(c_1 d)}, \dots, \widehat{t(c_n d)})$. Claramente φ es un morfismo de ${}^HA$-módulos a derecha. Si $\varphi(d) = 0$, entonces $\widehat{t(c_i d)} = 0$ para todo i. Por lo tanto $ad = 0$ por el ítem 1), y como a es un elemento regular de A concluimos que $d = 0$. Por ende, φ es inyectiva. □

5. Un contexto Morita que relaciona $A\#H$ y ${}^HA$

Sean H un álgebra de Hopf trenzada rígida, A un álgebra, s una transposición de H sobre A y ρ una s-acción de H sobre A. En esta sección asumimos que $s(H \otimes {}^HA) = {}^HA \otimes H$. Por ejemplo, esto sucede si A tiene dimensión finita sobre k o si H es un álgebra de Hopf en una categoría de Yetter-Drinfeld ${}^L_L\mathcal{YD}$, A es un H-álgebra en ${}^L_L\mathcal{YD}$ y $s\colon H \otimes A \longrightarrow A \otimes H$ es la trenza de ${}^L_L\mathcal{YD}$.

Construiremos un contexto Morita entre $A\#H$ y ${}^HA$ generalizando el resultado principal de [**7**]. Es evidente que A es un ${}^HA$-módulo a izquierda vía

$$a \triangleright b := g_s^{-1}(a) b,$$

donde $g_s\colon A \to A$ es el isomorfismo de k-álgebras introducido en el Teorema 2.20, y un ${}^HA$-módulo a derecha vía la multiplicación a derecha. Además, es fácil ver que A es un $A\#H$-módulo a izquierda vía

$$(a\#h) \cdot b = a(h \cdot b),$$

donde $h \cdot b$ denota a $\rho(h \otimes b)$. Con esta acción, A es un $(A\#H, {}^HA)$-bimódulo.

Proposición 2.65. *A es un $A\#H$-módulo a derecha vía*

$$b \leftarrow (a\#h) = \sum_i \bar{S}((\alpha \rightharpoonup h)_i) \cdot (ba)_i,$$

donde $\alpha\colon H \to k$ es la función modular de H,

$$\sum_i (\alpha \rightharpoonup h)_i \cdot (ba)_i = s^{-1}(ba \otimes \alpha \rightharpoonup h)$$

y $\bar{S}$ es la inversa por la composición de S. Además, A es un $({}^HA, A\#H)$-bimódulo.

Demostración. Primero probemos que A es un $A\#H$-módulo a derecha. Para esto es suficiente verificar que A es un A-módulo a derecha, un H-módulo a derecha y que

$$(b \leftarrow h)a = b \leftarrow (ha) \quad \text{para todo } a, b \in A \text{ y } h \in H.$$

Es evidente que la primera afirmación es verdadera. Verifiquemos que lo son las restantes:

Prueba de que A es un H-módulo a derecha vía $b \leftarrow h$: Para abreviar escribiremos $\hat{\alpha}$ en lugar de $\alpha \rightharpoonup (-)$. Como es claro que $b \leftarrow 1 = b$, solo debemos probar que

$$(b \leftarrow h) \leftarrow l = b \leftarrow (hl) \quad \text{para todo } b \in A \text{ y } h, l \in H.$$

Pero esto es cierto por las igualdades de la Figura 22, que valen por el ítem (4) de la Observa-

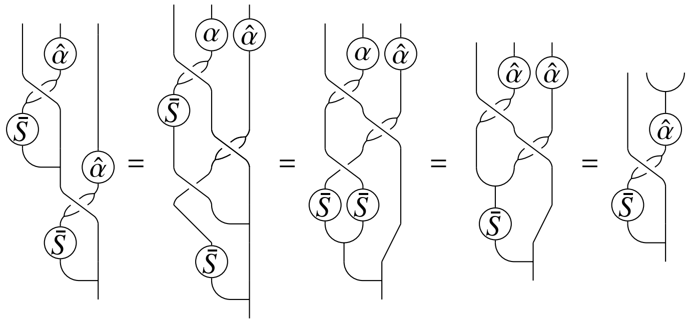


FIGURA 22

ción 2.45, la sociatividad de la acción, los hechos de que la aplicación s es compatible con μ, $\hat{\alpha}$ es un morfismo de álgebras,

$$c^{-1} \circ (\bar{S} \otimes H) = (H \otimes \bar{S}) \circ c^{-1} \qquad \text{y} \qquad \mu \circ (\bar{S} \otimes \bar{S}) \circ c^{-1} = \bar{S} \circ \mu.$$

Prueba de que $b \leftarrow (ha) = (b \leftarrow h)a$, para todo $a, b \in A$ y $h \in H$: esto se deduce de la Figura 23, en la cual la primera igualdad se sigue del Corolario 2.23 y la compatibilidad de s con μ_A, la segunda de los ítems (1) y (4) de la Observación 2.45, la tercera de que

$$\Delta \circ \bar{S} = (\bar{S} \otimes \bar{S}) \circ c^{-1} \circ \Delta,$$

la cuarta del hecho de que

$$s \circ (\bar{S} \otimes A) = (A \otimes \bar{S}) \circ s$$

y la asociatividad de la acción, la quinta de la compatibilidad de s con c y con $c^{-1} \circ \Delta$ (ver las Observaciones 1.17 y 2.5), la sexta del hecho de que

$$(H \otimes \Delta) \circ (H \otimes \hat{\alpha}) \circ \Delta = (\Delta \otimes \hat{\alpha}) \circ \Delta,$$

la séptima de la compatibilidad de c con Δ y la octava del hecho de que

$$\mu \circ (\bar{S} \otimes H) \circ c^{-1} \circ \Delta = \eta_H \circ \epsilon_H.$$

Resta probar que las acciones de $A\#H$ a derecha y la de ${}^HA$ a izquierda conmutan. Esto se demuestra en la Figura 24, donde B denota ${}^HA$ y $\bar{g}_s$ denota g_s^{-1}. Las igualdades de esta figura valen por la compatibilidad de s con μ_A, la condición (1) de la Observación 2.45, la Proposición 2.58 y el hecho de que $(\bar{S} \otimes {}^HA) \circ s^{-1} = s^{-1} \circ ({}^HA \otimes \bar{S})$. □

Por la Observación 1.26 sabemos que si H es un álgebra de Hopf trenzada rígida, entonces existe $q \in k \setminus \{0\}$ tal que $c(t \otimes t) = qt \otimes t$ para todo $t \in \int_H^l$.

LEMA 2.66. *Es cierto que $qt \cdot g_s(a) = g_s(t \cdot a)$ para todo $a \in A$.*

DEMOSTRACIÓN. Como $c(t \otimes t) = qt \otimes t$, por el ítem (4) de la Observación 2.45,

$$g_s(t \cdot a) \otimes t = s(t \otimes t \cdot a) = (\rho \otimes H) \circ (H \otimes s) \circ (c \otimes A)(t \otimes t \otimes a) = qt \cdot g_s(a) \otimes t,$$

donde $\rho(h \otimes a) = h \cdot a$. La afirmación es una consecuencia inmediata de este hecho. □

En la prueba del siguiente lema seguimos cuidadosamente los argumentos dados en [**9**]

LEMA 2.67. *Sea $q \in k \setminus \{0\}$ como en el lema anterior. Para cada $t \in \int_H^l$ es cierto que $S(t) = qt_{(1)}\alpha(t_{(2)})$.*

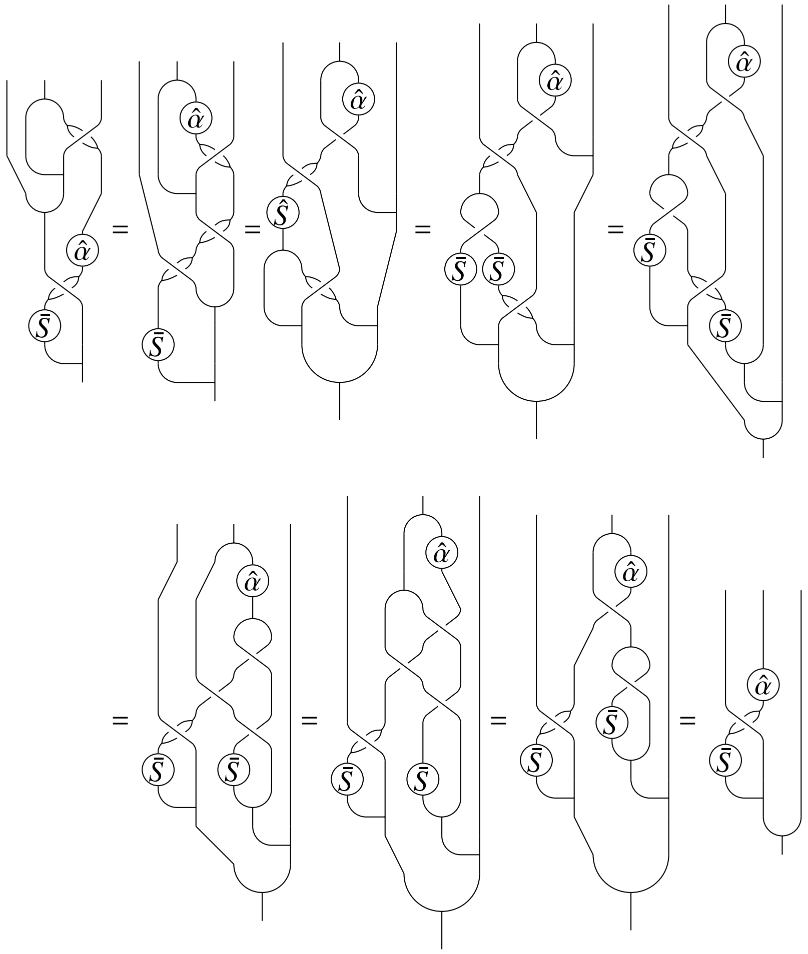


FIGURA 23

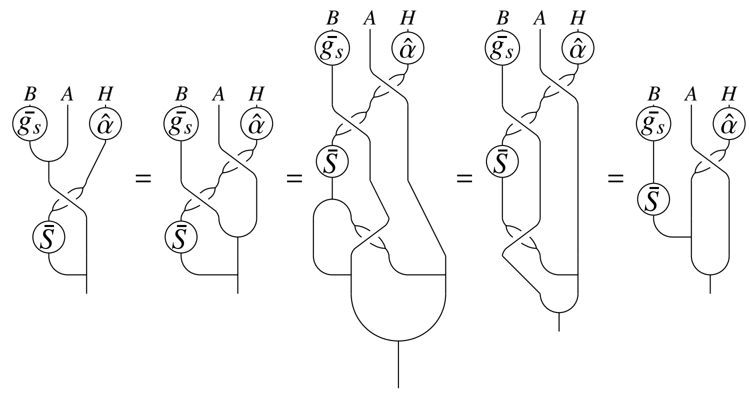


FIGURA 24

DEMOSTRACIÓN. Sea $\phi\colon H^* \to H$ la aplicación definida por $\phi(h^*) = t_{(1)}h^*(t_{(2)})$. Como ϕ es biyectiva, existe $T \in H^*$ tal que $t_{(1)}T(t_{(2)}) = 1$. Aplicando ϵ obtenemos que $T(t) = 1$. Por lo tanto

$$S(h) = S(h_{(1)})\epsilon(h_{(2)})t_{(1)}T(t_{(2)})$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_i S(h_{(1)})h_{(2)}t_{(1)_i}T(h_{(3)_i}t_{(2)})\\
&= \sum_i \epsilon(h_{(1)})t_{(1)_i}T(h_{(2)_i}t_{(2)})\\
&= \sum_i t_{(1)_i}T(h_i t_{(2)}),
\end{aligned}
$$

donde $\sum_i l_i \otimes h_i := c(h \otimes l)$. Consecuentemente, por la Observación 1.26 y el Teorema 1.27,

$$S(t) = f_H^r(t_{(1)})T(tt_{(2)}) = f_H^r(t_{(1)})\alpha(f_H^r(t_{(2)}))T(t) = qt_{(1)}\alpha(t_{(2)})T(t) = qt_{(1)}\alpha(t_{(2)}),$$

tal como se deseaba. □

Lema 2.68. *Es cierto que*

$$(\mu \otimes H) \circ (H \otimes c) \circ (\Delta \otimes H) \circ (H \otimes \bar{S}) \circ c^{-1} \circ \Delta = (\nu \circ \epsilon \otimes H) \circ \Delta$$

Demostración. Como la función Δ es compatible con c ,

$$(H \otimes \bar{S}) \circ c^{-1} = c^{-1} \circ (\bar{S} \otimes H) \quad \text{y} \quad \mu \circ c^{-1} \circ (\bar{S} \otimes H) \circ \Delta = \epsilon \circ \eta,$$

valen las igualdades de la Figura 25, como queremos. □

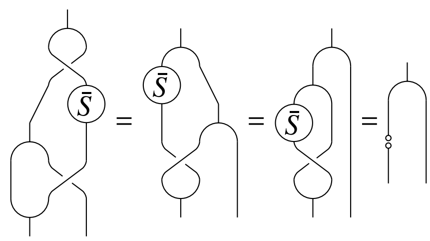


Figura 25

Recordemos que por definición, un contexto Morita que conecta dos anillos R y S consiste de un (R, S)-bimódulo M, un (S, R)-bimódulo N y dos morfismos de bimódulo

$$[-,-]\colon N \otimes_R M \longrightarrow S \qquad \text{y} \qquad (-,-)\colon M \otimes_S N \longrightarrow R$$

tales que

$$m \cdot [n, m'] = (m, n) \cdot m' \qquad \text{y} \qquad [n, m] \cdot n' = n \cdot (m, n)$$

para todo $m, m' \in M$ y $n, n' \in N$.

Teorema 2.69. *Los bimódulos $M = {}_{{}^HA} A_{A\#H}$ y $N = {}_{A\#H} A_{{}^HA}$ (las acciones son las definidas al comienzo de la sección), juntamente con las aplicaciones*

$$[-,-]\colon N \otimes_{{}^HA} M \longrightarrow A\#H, \qquad \textit{dada por } [a, b] = atb$$

y

$$(-,-)\colon M \otimes_{A\#H} N \longrightarrow {}^HA, \qquad \textit{dada por } (a, b) = t \cdot (ab),$$

definen un contexto Morita entre ${}^HA$ y $A\#H$.

Demostración. Por la Proposición 2.56 y el Teorema 2.20, sabemos que $ta = g_s(a)t$ para todo $a \in {}^HA$. En consecuencia, $[-,-]$ está bien definida. Probemos que es un morfismo de $A\#H$-bimódulos. Como $hbt = (h \cdot b)t$, para todo $b \in A$ y $h \in H$, la igualdad

$$(a\#h)[b, c] = (a\#h)btc = ahbtc = a(h \cdot b)tc = [a(h \cdot b), c] = [(a\#h) \cdot b, c].$$

vale. Por consiguiente, $[-,-]$ es un morfismo de $A\#H$-módulos a izquierda. Veamos que también lo es a derecha. Sea $b \in a$ y $h \in h$. Por la Proposición 2.54, sabemos que

$$bh = \sum_{i,j} h_{i(2)_j}(\bar{S}(h_{i(1)_j}) \cdot b_i),$$

donde

$$\sum_i h_i \otimes b_i = s^{-1}(b \otimes h) \qquad \text{y} \qquad \sum_j h_{i(2)_j} \otimes h_{i(1)_j} = c^{-1}(h_{i(1)} \otimes h_{i(2)}).$$

Por lo tanto, por el Teorema 2.54, la compatibilidad de s con Δ y el Corolario 2.23,

$$\begin{aligned}
[a,b](c\#h) &= atbch \\
&= at\sum_{i,j} h_{i(2)_j}(\bar{S}(h_{i(1)_j}) \cdot (bc)_i) \\
&= a\sum_{i,j} \alpha(h_{i(2)_j})t(\bar{S}(h_{i(1)_j}) \cdot (bc)_i) \\
&= \left[a, \sum_i \alpha(h_{i(2)_j})\bar{S}(h_{i(1)_j}) \cdot (bc)_i\right] \\
&= \left[a, \sum_i \bar{S}(\alpha \rightharpoonup h_i) \cdot (bc)_i\right] \\
&= \left[a, \sum_i \bar{S}((\alpha \rightharpoonup h)_i) \cdot (bc)_i\right] \\
&= [a, b \leftarrow (c\#h)]\,,
\end{aligned}$$

como deseamos. Ahora debemos verificar que $(-,-)$ está bien definida. Por los ítems (1) y (4) de la Observación 2.45 y la asociatividad de la acción, valen las igualdades de la Figura 26. Combinando

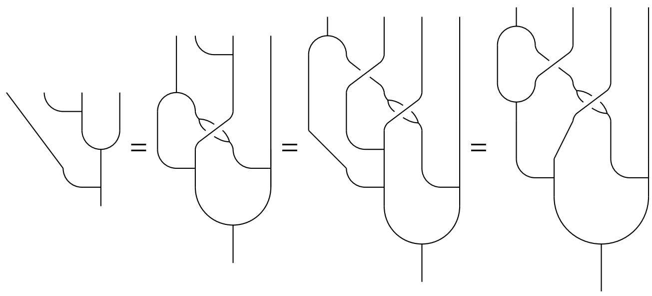


FIGURA 26

esto con el Lema 2.68, obtenemos que también son verdaderas las de la Figura 27. Usando este hecho y el Teorema 1.27, concluimos que valen las de la Figura 28, lo que muestra que

$$(c \leftarrow (a\#h), b) = (c, (a\#h) \cdot b), \quad \text{para todo } a, b, c \in A \text{ y } h \in H.$$

Veamos que $(-,-)$ es ${}^HA$-lineal a izquierda y a derecha. Sean $a, b \in A$ y $c \in {}^HA$. Por el ítem (1) de la Observación 2.45, la Proposición 2.58 y el Teorema 2.20,

$$\begin{aligned}
(c \triangleright a, b) &= t \cdot (g_s^{-1}(c)ab) \\
&= \mu \circ (\rho \otimes \rho) \circ (H \otimes s \otimes A) \circ (\Delta(t) \otimes g_s^{-1}(c) \otimes ab) \\
&= \mu \circ (\rho \otimes \rho) \circ (\eta \circ \epsilon \otimes s \otimes A) \circ (\Delta(t) \otimes g_s^{-1}(c) \otimes ab)
\end{aligned}$$

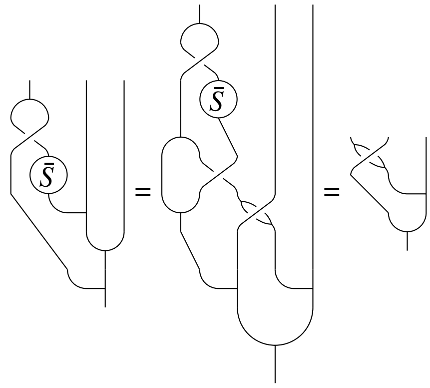


Figura 27

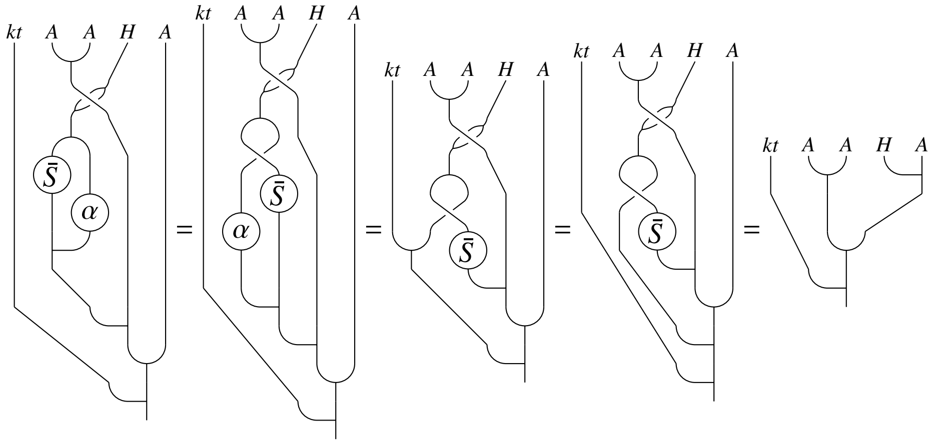


Figura 28

$$= c(t \cdot (ab))$$
$$= c(a, b).$$

De un modo similar puede probarse que $(-, -)$ es medio ${}^{H}A$-lineal. Para completar la demostración, resta ver que

$$a \leftarrow [b, c] = (a, b) \triangleright c \quad \text{y} \quad [a, b] \cdot c = a(b, c) \qquad \text{para todo } a, b, c \in A.$$

Sea $q \in k \setminus \{0\}$ definida por $c(t \otimes t) = qt \otimes t$. Por la compatibildad de s^{-1} con S, el Teorema 2.20 y los Lemas 2.66 y 2.67,

$$a \leftarrow [b, c] = (a \leftarrow b\#t) \leftarrow c\#1 = q^{-1}(t \cdot g_s^{-1}(ab))c = g_s^{-1}(t \cdot (ab))c = (a, b) \triangleright c,$$

y por el ítem (1) de la Observación 2.45,

$$[a, b] \cdot c = atb \cdot c = \sum_i (at_{(1)} \cdot b_i)\#t_{(2)_i}) \cdot c = \sum_i (at_{(1)} \cdot b_i)(t_{(2)_i} \cdot c) = a(t \cdot (bc)) = a(b, c),$$

donde $\sum_i t_{(1)} \otimes b_i \otimes t_{(2)_i} = \sum_i t_{(1)} \otimes s(t_{(2)} \otimes b)$, lo que termina la demostración. □

Corolario 2.70. *Si $\hat{t}\colon A \to {}^{H}A$ es sobreyectiva y $AtA = A\#H$, entonces $A\#H$ es Morita equivalente a ${}^{H}A$.*

6. Cociclos normales y productos cruzados

Sean H una biálgebra trenzada y A un álgebra. En esta sección introducimos la noción de producto cruzado. Las aplicaciones torcidas χ y los cociclos $\mathcal{F}$ involucrados en la construcción de estos productos cruzados tienen la forma

$$\chi = (\rho \otimes H) \circ (H \otimes s) \circ (\Delta \otimes A) \quad \text{y} \quad \mathcal{F} = (f \otimes \mu) \circ \Delta_{H \otimes^c H},$$

donde $s\colon H \otimes A \to A \otimes H$ es una transposición, ρ es una función de $H \otimes A$ en A, $H \otimes^c H$ es la coálgebra de la Observación 1.15 y f es una función de H^2 en A. En la Sección 3 determinamos las hipótesis que debe satisfacer χ para que exista ρ, y probamos que χ es una aplicación torcida si y sólo si ρ satisface las primeras tres condiciones de la Observación 2.45. En esta sección asumimos que ρ es una s-acción débil y que χ satisface la igualdad

$$\chi = (\rho \otimes H) \circ (H \otimes s) \circ (\Delta \otimes A),$$

y estudiamos las relaciones entre $\mathcal{F}$ y f. Comenzamos determinando las condiciones que debe satisfacer $\mathcal{F}$ para que exista la aplicación f. Observemos que en ese caso f está unívocamente determinada por la fórmula $f = (A \otimes \epsilon) \circ \mathcal{F}$. En un paso posterior, estableceremos las condiciones necesarias y suficientes sobre f para que $\mathcal{F}$ sea un cociclo normal que satisface la condición de módulo torcido respecto de χ.

Proposición 2.71. *Dada una aplicación $\mathcal{F}\colon H \otimes H \to A \otimes H$, existe $f\colon H \otimes H \to A$ tal que*

$$\mathcal{F} = (f \otimes \mu) \circ \Delta_{H \otimes^c H}$$

si y sólo si $(\mathcal{F} \otimes \mu) \circ \Delta_{H \otimes^c H} = (A \otimes \Delta_H) \circ \mathcal{F}$.

Demostración. La dejamos como ejercicio para el lector. □

Definición 2.72. *Decimos que $f\colon H \otimes H \to A$ es una* aplicación normal *si*

$$f(1 \otimes x) = f(x \otimes 1) = \epsilon(x) \quad \text{para todo } x \in H,$$

y que es un cociclo *que satisface la* condición de módulo torcido *si se cumplen las igualdades de la Figura 29. Más precisamente, la primer igualdad es la condición de cociclo y la segunda es la*

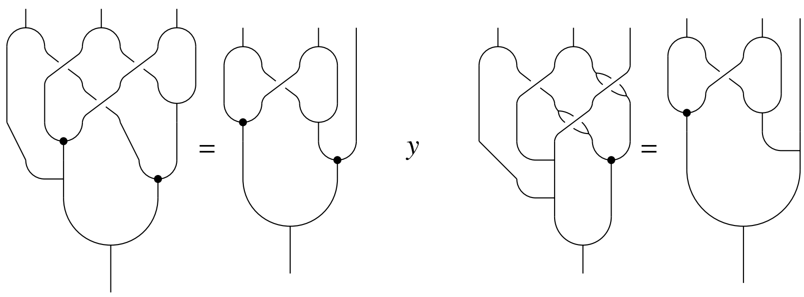


Figura 29

de módulo torcido. Finalmente, diremos que f es compatible con s si es una aplicación en $\mathcal{B}_H$. En otras palabras, si

$$(f \otimes H) \circ (H \otimes c) \circ (c \otimes H) = s \circ (H \otimes f).$$

Sea $f\colon H^2 \to A$ una función y $\mathcal{F}\colon H \otimes H \to A \otimes H$ la aplicación

$$\mathcal{F} := (f \otimes \mu) \circ \Delta_{H \otimes^c H}.$$

Es evidente que $\mathcal{F}$ es una aplicación en $\mathcal{B}_H$ si y sólo si f es compatible con s.

Teorema 2.73. *Sean $f\colon H^2 \to A$ una aplicación y $\mathcal{F}$ la función*

$$\mathcal{F} := (f \otimes \mu) \circ \Delta_{H \otimes^c H}.$$

Asumamos que f es compatible con s. Entonces $\mathcal{F}$ es un cociclo normal que satisface la condición de módulo torcido si y sólo si f también lo es.

Demostración. Claramente $\mathcal{F}$ es normal si y sólo si f lo es. Las Figuras 30 y 31, que prueban

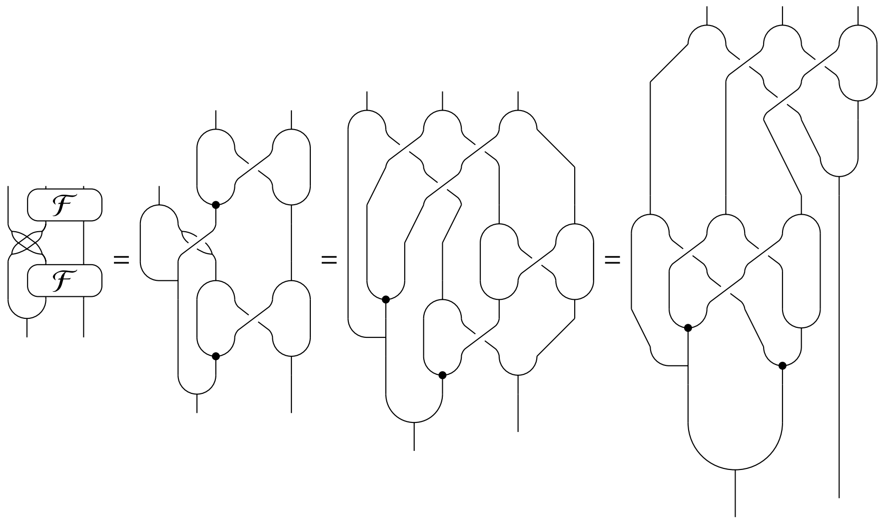


Figura 30

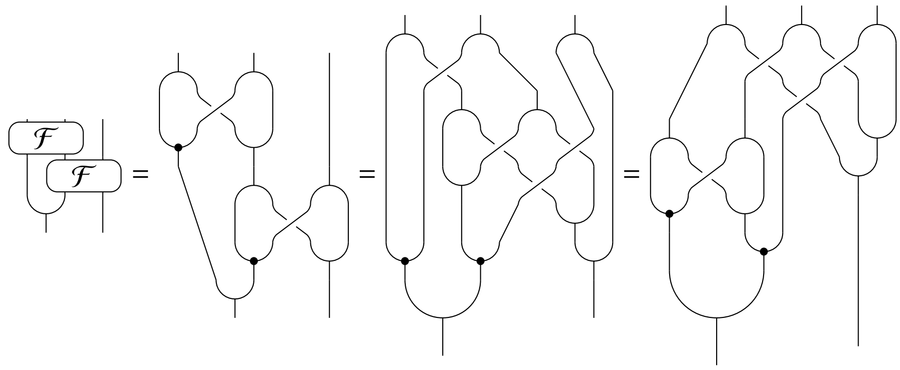


Figura 31

la equivalencia entre las condiciones de cociclo, valen por la compatibilidad de f con s, el hecho de que

$$\Delta \circ \mu = (\mu \otimes \mu) \circ (H \otimes c \otimes H) \circ (\Delta \otimes \Delta),$$

la compatibilidad de μ con c y el Corolario 2.26. Para completar la demostración, resta mostrar que $\mathcal{F}$ satisface la condición de módulo torcido si y sólo si f lo hace. Esto resulta evidente por las Figuras 32 y 33. Ambas son verdaderas por la segunda fórmula de la Proposición 2.48 y el Corolario 2.26. $\square$

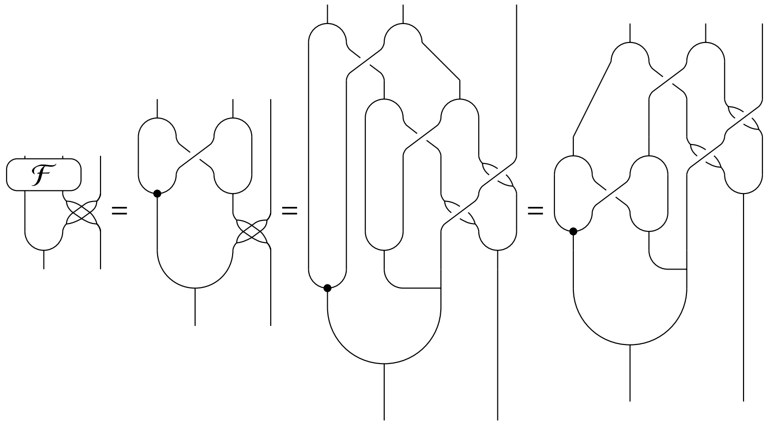


FIGURA 32

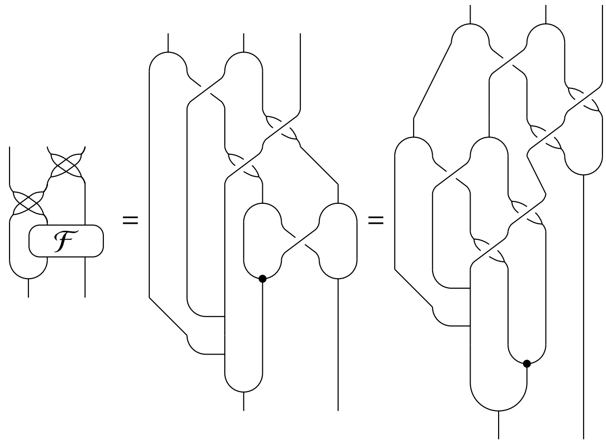


FIGURA 33

Sea H una biálgebra trenzada, A un álgebra, s una transposición de H sobre A,

$$\rho\colon H \otimes A \longrightarrow A$$

una s-acción débil, χ la aplicación torcida asociada a ρ, $f\colon H^2 \to A$ un cociclo normal compatible con s que satisface la condición de módulo torcido y

$$\mathcal{F}\colon H \otimes H \longrightarrow A \otimes H$$

la aplicación $\mathcal{F} = (f \otimes \mu) \circ \Delta_{H \otimes^c H}$.

DEFINICIÓN 2.74. *El* producto cruzado asociado con (s, ρ, f) *es el álgebra* $A\#_f H$*, formada a partir de* χ *y* $\mathcal{F}$ *en la Definición 1.1.*

OBSERVACIÓN 2.75. *Por los Teoremas 1.3, 2.47 y 2.73, sabemos que* $A\#_f H$ *es asociativa y unitaria.*

Ahora consideramos varios ejemplos de productos cruzados construidos a partir de datos que satisfacen las condiciones de la Definición 2.74

EJEMPLO 2.76. *Cuando H es un álgebra de Hopf estándar y s es el flip, la Definición 2.74 da el producto cruzado clásico introducido en* [**3**] *y* [**14**]. *Cuando H es un álgebra de Hopf en una* *categoría trenzada C cuya categoría monoidal subyacente es la categoría de espacios vectoriales y s es la trenza de C, obtenemos el álgebra de productos cruzados subyacente a los productos cruzados de biálgebras considerados en* [**24**].

Ejemplo 2.77. *Supongamos que f es trivial (es decir, $f(h \otimes l) = \epsilon(h)\epsilon(l)$ para todo $h, l \in H$). Entonces f es automáticamente un cociclo normal y la condición de módulo torcido vale si y sólo si ρ es una s-acción. De aquí se deduce que los productos cruzados con f trivial son los productos semidirectos introducidos en la Sección 3. En* [**17**] *se muestra que las extensiones de Ore $A[x, \alpha, \delta]$, con $\alpha\colon A \to A$ un homomorfismo y $\delta\colon A \to A$ un α-derivación tal que $\alpha \circ \delta = \delta \circ \alpha$, son productos semidirectos en este sentido. Otro ejemplo es el álgebra de operadores diferenciales $D_{q,p}(\boldsymbol{X}, \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}})(p, q \in k\backslash\{0\})$, que es el álgebra generada por las variables $x_1, \dots, x_r, \dots, \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_r}$ y las relaciones*

$$
\begin{aligned}
&x_j x_i = q x_i x_j && \text{si } i < j, && \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_i} = q\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j} && \text{si } i < j,\\
&\frac{\partial}{\partial x_j} x_i = q^{-1} x_i \frac{\partial}{\partial x_j} && \text{si } i < j, && \frac{\partial}{\partial x_i} x_i = p x_i \frac{\partial}{\partial x_i} + 1,\\
&\frac{\partial}{\partial x_j} x_i = q x_i \frac{\partial}{\partial x_j} && \text{si } i > j.
\end{aligned}
$$

Sea s la transposición de $k_q[\frac{\partial}{\partial \mathbf{X}}]$ sobre $k_q[\mathbf{X}]$ considerada en el Ejemplo 2.10, y para $i \le j \le r$, sea $\delta_j^{(p)}\colon k_q[\mathbf{X}] \to \mathbf{k_q}[\mathbf{X}]$ la aplicación definida por:

$$
\delta_j^{(p)}(x_1^{n_1} \cdots x_r^{n_r}) = \begin{cases} q^{-n_1 - \cdots - n_{j-1}}[n_j]_p & \text{if } n_j > 0,\\ 0 & \text{if } n_j = 0.\end{cases}
$$

donde $[n]_p = 1 + p + \cdots p^{n-1}$. Es fácil ver que la fórmula

$$
\rho(\frac{\partial}{\partial x_j} \otimes P) = \delta_j^{(p)}(P)
$$

define una s-acción de $k_q[\frac{\partial}{\partial \mathbf{X}}]$ sobre $k_q[\mathbf{X}]$, y que $D_{q,p}(\mathbf{X}, \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}})$ es isomorfo al producto semidirecto construido a partir de estos datos.

Ejemplo 2.78. *Supongamos que ρ es la s-acción trivial $\rho(h \otimes a) = \epsilon(h)a$. Entonces la condición de módulo torcido se satisface si y sólo si*

$$
\mu \circ (A \otimes f) \circ (s \otimes H) \circ (H \otimes s) = \mu \circ (f \otimes A).
$$

Así, si se cumple esta igualdad y f es un cociclo normal compatible con s (para la acción trivial), entonces $A\#_f H$ es el producto cruzado, que denotaremos $A_f^s[H]$. Si f también es trivial, entonces $A^s[H] := A_f^s[H]$ coincide con $A \otimes_s H$.

Ejemplo 2.79. *Sea G un grupo finitamente generado, A una k-álgebra y*

$$
s\colon k[G] \otimes A \to A \otimes k[G]
$$

una transposición. Por el Teorema 2.19 sabemos que si G es finitamente generado, entonces existe una $\mathrm{Aut}(G)^{\mathrm{op}}$-graduación $A = \bigoplus_{\zeta \in \mathrm{Aut}(G)} A_\zeta$ sobre A tal que $s(x \otimes a) = a \otimes \zeta(x)$ para todo $a \in A_\zeta$. Es fácil verificar que una aplicación $g \otimes a \to g \cdot a$ es una s-acción débil de $k[G]$ sobre A (una s-acción si es asociativa) si y sólo si

1. $x \cdot (ab) = (x \cdot a)(\zeta(x) \cdot b)$ *si* $a \in A_\zeta$ *y* $x \in G$,
2. $x \cdot 1 = 1$, *para todo* $x \in G$,
3. $1 \cdot a = a$, *para todo* $a \in A$,

4. *$x \cdot a \in A_\zeta$, para todo $x \in G, a \in A_\zeta$,*

y que una aplicación $f\colon k[G] \otimes k[G] \to A$ es un cociclo normal compatible con s que satisface la condición de módulo torcido si y sólo si

1. $\operatorname{Im} f \subseteq A_{\mathrm{id}}$,
2. *$f(x \otimes 1) = f(1 \otimes x) = 1$, para todo $x \in G$,*
3. *$xf(y \otimes z)f(x \otimes yz) = f(x \otimes y)f(xy \otimes z)$, para todo $x, y, z \in G$,*
4. *$(x \cdot (y \cdot a))f(\zeta(x) \otimes \zeta(y)) = f(x \otimes y)((xy) \cdot a)$, para todo $x, y \in G, a \in A_\zeta$.*

La multiplicación del producto cruzado $A\#_f k[G]$, construido a partir de esos datos, está dada por

$$(a\#x)(b\#y) = a(x \cdot b)f(\zeta(x) \otimes y)\#\zeta(x)y, \quad \text{si } b \in A_\zeta. \tag{6.12}$$

El grupo de automorfismos $\operatorname{Aut}(G)$ actúa sobre G^{op} vía $\zeta \cdot x = \zeta(x)$. Consideremos el producto semidirecto $G^{\mathrm{op}} \rtimes \operatorname{Aut}(G)$. De la igualdad (6.12) se deduce inmediatamente que $A\#_f k[G]$ es un álgebra $(G^{\mathrm{op}} \rtimes \operatorname{Aut}(G))^{\mathrm{op}}$-graduada, donde $A_\zeta \otimes x$ es la componente homogénea de grado (x, ζ).

Finalizaremos esta sección mostrando que si f es inversible para la convolución, entonces la aplicación s está unívocamente determinada.

Teorema 2.80. *Sea H un álgebra de Hopf trenzada, A un álgebra,*

$$\chi\colon H \otimes A \longrightarrow A \otimes H$$

una aplicación torcida y

$$\mathcal{F}\colon H \otimes H \longrightarrow A \otimes H$$

un cociclo normal que satisface la condición de módulo torcido. Si existen una aplicación

$$s\colon H \otimes A \longrightarrow A \otimes H$$

compatible con la estructura de coálgebra de H, una aplicación

$$\rho\colon H \otimes A \longrightarrow A$$

tal que $\rho(1 \otimes a) = a$ para todo $a \in A$, y una aplicación

$$f\colon H \otimes^c H \to A,$$

inversible respecto de la convolución, tales que

$$\chi = (\rho \otimes H) \circ (H \otimes s) \circ (\Delta \otimes A) \qquad y \qquad \mathcal{F} = (f \otimes \mu) \circ \Delta_{H \otimes^c H},$$

entonces

$$\rho = (A \otimes \epsilon) \circ \chi,$$
$$f = (A \otimes \epsilon) \circ \mathcal{F}$$

y

$$s = (\mu^2 \otimes H) \circ (f^{-1} \otimes A \otimes f \otimes H) \circ (H \otimes H \otimes \chi \otimes \Delta) \circ (H \otimes c \otimes A \otimes H) \\ \circ (\Delta \otimes H \otimes A \otimes H) \circ (S \otimes H \otimes \chi) \circ (\Delta^2 \otimes A).$$

Demostración. Es claro que $f = (A \otimes \epsilon) \circ \mathcal{F}$, y usando la compatibilidad de s con ϵ es fácil ver que $\rho = (A \otimes \epsilon) \circ \chi$. Resta probar la aserción sobre s, Por la compatibilidad de s con Δ valen las igualdades de la Figura 34. Usando esto, la condición de módulo torcido de $\mathcal{F}$, el Corolario 2.26 y el hecho de que $\rho(1 \otimes a) = a \otimes 1$ para todo $a \in A$, se deduce que también valen las de la Figura 35, lo que muestra que la fórmula de s es verdadera. □

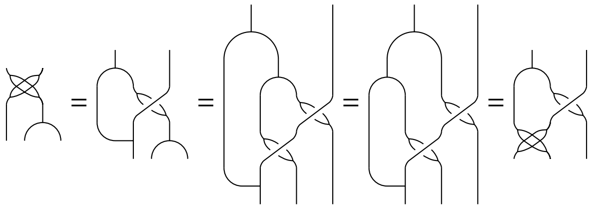


FIGURA 34

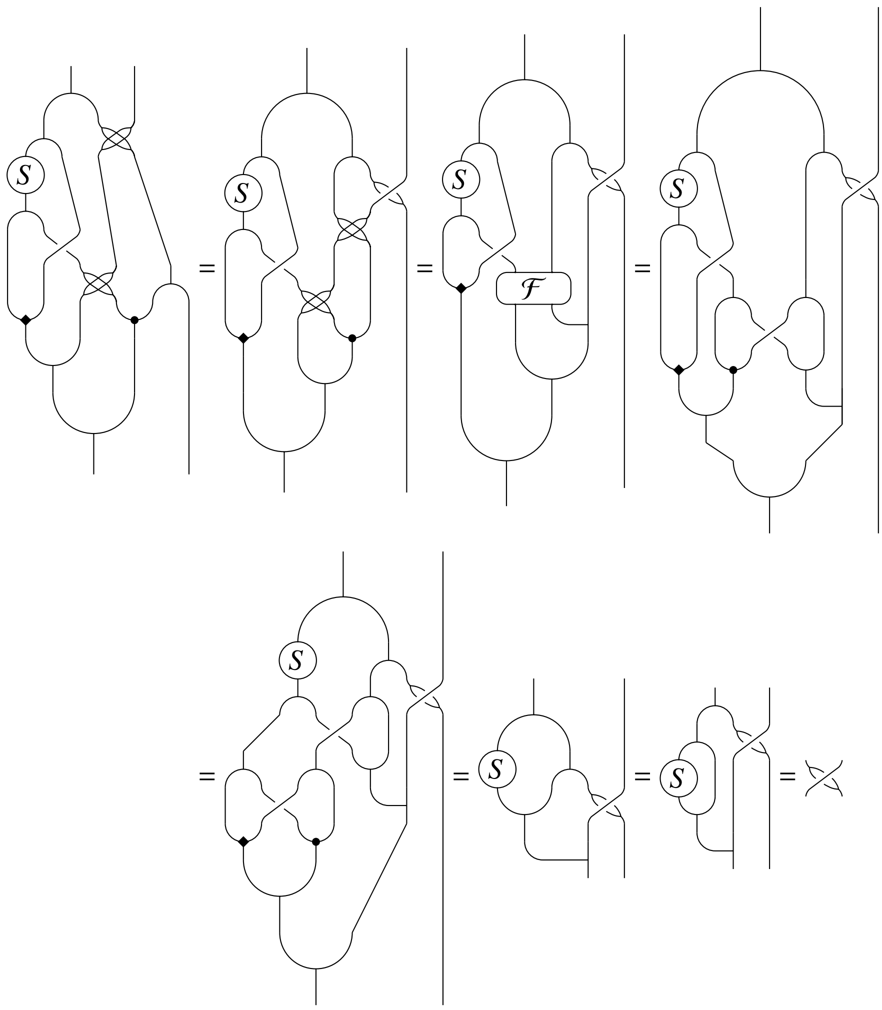


FIGURA 35

7. Caracterizaciones intrínsecas

Sea H un álgebra de Hopf trenzada. En esta sección adaptamos a nuestro contexto las nociones de H-extensiones normales, cleft y H-Galois y probamos que la caracterización de productos cruzados $A\#_f H$ con cociclo inversible por convolución como una extensión normal H-Galois y como una extensión cleft siguen siendo válidas en nuestro contexto.

Teorema 2.81. *Sean R un álgebra, C una coálgebra y $\mathrm{End}_R^C(R\otimes C)$ la k-álgebra de todos los endomorfismos R-lineales a izquierda y C-colineales a derecha de $R\otimes C$. La aplicación*

$$T_R^C\colon \mathrm{Hom}_k(C,R) \longrightarrow \mathrm{End}_R^C(R\otimes C),$$

dada por $T_R^C(g)(r\otimes c) = rg(c_{(1)})\otimes c_{(2)}$, es un antiisomorfismo de álgebras (aquí $\mathrm{Hom}_k(C,R)$ es considerado como un álgebra vía el producto de convolución y $\mathrm{End}_R^C(R\otimes C)$ es considerado como un álgebra vía la composición de endomorfismos). La aplicación inversa de T_R^C está dada por

$$(T_R^C)^{-1}(g)(c) = (R\otimes\epsilon)\circ g(c) = (R\otimes\epsilon)\circ g(1\otimes c).$$

Definición 2.82. *Sea H un álgebra de Hopf trenzada, (B,s) un H-comódulo algebra a derecha y $i\colon A\hookrightarrow B$ un morfismo inyectivo de álgebras. Decimos que $(i\colon A\hookrightarrow B,s)$ es una H-extensión de A si $i(A) = B^{\mathrm{co}\,H}$. Sea $(i'\colon A\hookrightarrow B',s')$ otra H-extensión de A. Decimos que $(i\colon A\hookrightarrow B,s)$ e $(i'\colon A\hookrightarrow B',s')$ son equivalentes si existe un isomorfismo de H-comódulo algebras*

$$f\colon (B,s)\longrightarrow (B',s'),$$

que también es un morfismo de A-módulos a izquierda.

Proposición 2.83. *Sean s una transposición de H sobre A, $\rho\colon H\otimes A\longrightarrow A$ una s-acción y $f\colon H^2\longrightarrow A$ un cociclo normal compatible con s que satisface la condición de módulo torcido. Sea $A\#_f H$ el producto cruzado asociado con (s,ρ,f). La aplicación $\widehat{s} := (A\otimes c)\circ(s\otimes H)$ es una transposición de H sobre $A\#_f H$.*

Proposición 2.84. *El par $(A\#_f H,\widehat{s})$ es un H-comódulo álgebra vía $\nu := A\otimes\Delta$. Además $(A\hookrightarrow A\#_f H,\widehat{s})$ es una H-extensión y la función*

$$\gamma\colon (H,c)\to (A\#_f H,\widehat{s}),$$

dada por $\gamma(h) = 1\#h$, es un morfismo de H-comódulos.

Definición 2.85. *Una H-extensión $(i\colon A\hookrightarrow B,s)$ de A es cleft si hay un morfismo de H-comódulos $\gamma\colon (H,c)\to(B,s)$, que es inversible bajo convolución; es H-Galois si la aplicación $\beta_B\colon B\otimes_A B\to B\otimes H$ definida por $\beta(b\otimes b') = (b\otimes 1)\nu(b')$, donde ν denota la coacción de B, es biyectiva; y tiene la propiedad de la base normal si existe un isomorfismo A-lineal a izquierda de H-comódulos a derecha $\phi\colon (A\otimes H,\widehat{s_A})\to(B,s)$, donde la coacción de $A\otimes H$ es $A\otimes\Delta$ y $\widehat{s_A} = (A\otimes c)\circ(s_A\otimes H)$, siendo $s_A\colon H\otimes A\to A\otimes H$ la transposición inducida por s (véase la Observación 2.34).*

Sea $\gamma\colon (H,c)\to(B,s)$ una aplicación cleft. Para $h\in H$ escribamos

$$s(h\otimes\gamma^{-1}(1)) = \sum_i \gamma_i^{-1}\otimes h_i.$$

Como $s(h\otimes\gamma(1)) = \gamma(1)\otimes h$, es cierto que

$$\gamma(1)\gamma^{-1}(1)\otimes h = 1\#h = s(h\otimes 1) = s(h\otimes\gamma(1)\gamma^{-1}(1)) = \sum_i \gamma(1)\gamma_i^{-1}\otimes h_i.$$

Por lo tanto,

$$s(h\otimes\gamma^{-1}(1)) = \gamma^{-1}(1)\otimes h.$$

Usando este hecho se comprueba inmediatamente que $\gamma' := \gamma(1)^{-1}\gamma$ es una aplicación cleft que satisface que $\gamma'(1) = 1$.

Si $(A\hookrightarrow B,s)$ es una H-extensión con una base normal

$$\phi\colon (A\otimes H,\widehat{s_A})\to(B,s)$$

que satisface $\phi(1\otimes 1) = 1$, entonces B es isomorfo vía ϕ al producto cruzado $A\#_f H$ construido a partir de

- la transposición $s_A\colon H\otimes A\to A\to H$ inducida por s,
- la s_A-acción débil $\rho(h\otimes a)=(A\otimes\epsilon)\circ\phi^{-1}(\phi(1\otimes h)\phi(a\otimes 1))$, y
- el cociclo $f(h\otimes l)=(A\otimes\epsilon)\circ\phi^{-1}(\phi(1\otimes h)\phi(1\otimes l))$.

En efecto, argumentando como en la Sección 3 de [**27**] se ve que la multiplicación $\mu_{A\#_f H}$ de $A\otimes H$, obtenida transportando la multiplicación de B a través de ϕ^{-1}, tiene la forma

$$\mu_{A\#_f H}=(\mu\otimes H)\circ(\mu\otimes\mathcal{F})\circ(A\otimes\chi\otimes A),$$

donde

$$\chi=(\rho\otimes H)\circ(H\otimes s_A)\circ(\Delta\otimes A)\quad\text{y}\quad\mathcal{F}=(f\otimes\mu)\circ\Delta_{H\otimes_c H}.$$

Por los Teoremas 1.3 y 2.47 sabemos que ρ satisface las primeras tres condiciones de la Observación 2.45. Usando que

$$\widehat{s_A}\colon H\otimes A\#_f H\longrightarrow A\#_f H\otimes H$$

es compatible con $\mu_{A\#_f H}$, se comprueba fácilmente que también satisface la cuarta condición de dicha observación, y que el cociclo f es compatible con s_A. Finalmente, por los Teoremas 1.3 y 2.73, sabemos que f es un cociclo normal que satisface la condición de módulo torcido. Recíprocamente, es claro que cada producto cruzado es una H-extensión que tiene una base normal.

Lema 2.86. *Sean H un álgebra de Hopf trenzada e $(i\colon A\hookrightarrow B,s)$ una H-extensión cleft, con función cleft γ. La función $f\colon H\otimes A\to B$, definida por*

$$f:=\mu_B\circ(\mu_B\otimes B)\circ(\gamma\otimes i\otimes\gamma^{-1})\circ(H\otimes s_A)\circ(\Delta\otimes A)$$

toma valores en $i(A)$.

Demostración. Sea $\lambda_r^X\colon X\to X\otimes k$ la aplicación canónica. Probaremos que

$$\nu\circ f=(f\otimes\eta)\circ(H\otimes\lambda_r^A).$$

Un cálculo directo muestra que

$$\begin{aligned}\nu\circ f&=\nu\circ\mu_B\circ(\mu_B\otimes B)\circ(\gamma\otimes i\otimes\gamma^{-1})\circ(H\otimes s_A)\circ(\Delta\otimes A)\\&=(\mu_B\otimes\mu_H)\circ(B\otimes s\otimes H)\circ(\nu\otimes\nu)\circ(\mu_B\otimes B)\circ(\gamma\otimes i\otimes\gamma^{-1})\circ(H\otimes s_A)\circ(\Delta\otimes A)\\&=(\mu_B\otimes\mu_H)\circ(\mu_B\otimes s\otimes H)\circ(B\otimes s\otimes\nu)\circ(\nu\otimes i\otimes\gamma^{-1})\circ(\gamma\otimes s_A)\circ(\Delta\otimes A)\\&=(\mu_B\otimes\mu_H)\circ(\mu_B\otimes s\otimes H)\circ(\gamma\otimes i\circ s_A\otimes\nu\circ\gamma^{-1})\circ(\Delta\otimes s_A)\circ(\Delta\otimes A)\\&=(\mu_B\otimes\mu_H)\circ(B\otimes s\otimes H)\circ(\mu_B\otimes H\otimes\nu\circ\gamma^{-1})\circ(B\otimes i\otimes\Delta)\circ(\gamma\otimes s_A)\circ(\Delta\otimes A)\\&=(\mu_B\otimes H)\circ(\mu_B\otimes L)\circ(B\otimes i\otimes H)\circ(\gamma\otimes s_A)\circ(\Delta\otimes A),\end{aligned}$$

donde

$$L:=(B\otimes\mu_H)\circ(s\otimes H)\circ(H\otimes\nu\circ\gamma^{-1})\circ\Delta.$$

Dado que, por [**17**, Lemma 10.7(2)],

$$\begin{aligned}L&=(B\otimes\mu_H)\circ(s\otimes H)\circ(H\otimes\gamma^{-1}\otimes S)\circ(H\otimes c\circ\Delta)\circ\Delta\\&=(\gamma^{-1}\otimes\mu_H)\circ(c\otimes S)\circ(H\otimes c)\circ(H\otimes\Delta)\circ\Delta\\&=(\gamma^{-1}\otimes\mu_H)\circ(c\otimes S)\circ(H\otimes c)\circ(\Delta\otimes H)\circ\Delta\\&=(\gamma^{-1}\otimes H)\circ c\circ(\mu_H\otimes H)\circ(H\otimes S\otimes H)\circ(\Delta\otimes H)\circ\Delta\\&=(\gamma^{-1}\otimes H)\circ c\circ(\eta\circ\epsilon\otimes H)\circ\Delta\\&=\gamma^{-1}\otimes\eta,\end{aligned}$$

tenemos que

$$\nu\circ f=(\mu_B\otimes H)\circ(B\otimes\gamma^{-1}\otimes\eta)\circ(\mu_B\otimes\lambda_r^H)\circ(B\otimes i\otimes H)\circ(\gamma\otimes s_A)\circ(\Delta\otimes A)=(f\otimes\eta)\circ(H\otimes\lambda_r^A),$$

tal como se deseaba. □

Teorema 2.87. *Sea H un álgebra de Hopf trenzada y $(A \hookrightarrow B, s)$ una H-extensión. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *$(A \hookrightarrow B, s)$ es cleft.*
2. *$(A \hookrightarrow B, s)$ es H-Galois con una base normal.*
3. *Existe un isomorfismo $(B, s) \longrightarrow (A\#_f H, \widehat{s})$, donde $A\#_f H$ es un producto cruzado cuyo cociclo $f\colon H \otimes^c H \to A$ es inversible bajo convolución.*

Además, si γ es una función cleft de (i, s) con $\gamma(1_H) = 1_B$, entonces

4. *La aplicación $\phi\colon (A \otimes H, \widehat{s_A}) \longrightarrow (B, s)$, definida por $\phi(a \otimes h) := i(a)\gamma(h)$, es una base normal de B.*
5. *La acción débil ρ y el cociclo σ están dados por*
$$\rho = \mu_B \circ (\mu_B \otimes B) \circ (\gamma \otimes i \otimes \gamma^{-1}) \circ (H \otimes s_A) \circ (\Delta \otimes A) \tag{7.13}$$
y
$$\sigma = \mu_B \circ (\mu_B \otimes \gamma^{-1}) \circ (\gamma \otimes \gamma \otimes \mu_H) \circ \Delta_{H\otimes^c H}. \tag{7.14}$$

Demostración. 1) ⇔ 2) Supongamos que $\gamma\colon (H, c) \to (B, s)$ una aplicación cleft. Entonces $\nu \circ \gamma = (\gamma \otimes H) \circ \Delta$ es una aplicación inversible por convolución, puesto que $\nu\colon B \to B \otimes_s H$ es un morfismo de álgebras. Además, para todo $b \in b$,

$$\begin{aligned} T^H_{B\otimes_s H}(\nu \circ \gamma)(\nu(b_{(0)}\gamma^{-1}(b_{(1)}) \otimes b_{(2)}) &= T^H_{B\otimes_s H}(\nu \circ \gamma)(T^H_{B\otimes_s H}(\nu\gamma^{-1})(\nu(b_{(0)}) \otimes b_{(1)}) \\ &= b_{(0)}\gamma^{-1}(b_{(1)})\gamma(b_{(2)}) \otimes b_{(3)} \otimes b_{(4)} \\ &= T^H_{B\otimes_s H}((\gamma \otimes H) \circ \Delta)(b_{(0)}\gamma^{-1}(b_{(1)}) \otimes 1 \otimes b_{(2)}). \end{aligned}$$

Aplicando $(B \otimes H \otimes \epsilon) \circ (T^H_{B\otimes_s H})^{-1}(\nu \circ \gamma)$ a esta igualdad obtenemos que

$$\nu(b_{(0)}\gamma^{-1}(b_{(1)}) = b_{(0)}\gamma^{-1}(b_{(1)}) \otimes 1.$$

De modo que la función $\phi\colon (A \otimes H, \widehat{s_A}) \to (B, s)$, dada por $\phi(a \otimes h) = a\gamma(h)$, es una base normal porque la correspondencia $b \mapsto b_{(0)}\gamma^{-1}(b_{(1)}) \otimes b_{(2)}$ es una función bien definida de B en $A \otimes H$ y es la inversa de ϕ respecto de la composición. Esto prueba que vale el item 4). Sea

$$\alpha\colon B \otimes H \to B \otimes_A B$$

la aplicación definida por $\alpha := B \otimes_A \gamma$. Para cada $b \in B$ y $h \in H$ tenemos que

$$\beta_B \circ \alpha(b \otimes h) = \beta_B(b \otimes \gamma(h)) = b\gamma(h_{(1)}) \otimes h_{(2)} = T^H_B(\gamma)(b \otimes h). \tag{7.15}$$

Así, $\beta_B \circ \alpha = T^H_H(\gamma)$. Por lo tanto β_B es un isomorfismo, dado que $T^H_B(\gamma)$ y α lo son. Asumamos ahora que $(A \hookrightarrow B, s)$ es H-Galois con una base normal, y que

$$\phi\colon (A \otimes H, \widehat{s_A}) \longrightarrow (B, s)$$

es una base normal. Sea $\gamma\colon (H, c) \to (B, s)$ la aplicación definida por $\gamma(h) = \phi(1 \otimes h)$ y sea

$$\alpha\colon B \otimes H \longrightarrow B \otimes_A B$$

como en el párrafo anterior. Luego la igualdad (7.15) vale. Como $\beta_B \circ \alpha$ es una aplicación biyectiva y T^H_B es un antiisomorfismo de álgebras, esto muestra que γ es inversible respecto de la convolución.

2) ⇒ 3) Sea $\phi\colon (A \otimes H, \widehat{s_A}) \to (B, s)$ una base normal de $(A \hookrightarrow B, s)$. Por la equivalencia entre los ítems (1) y (2) y los comentarios que siguen a la Definición 2.85, podemos asumir que $\phi(1 \otimes 1) = 1$ (simplemente tomemos $\phi(a \otimes h) = a\gamma(h)$, donde $\gamma\colon (H, c) \to (B, s)$ es una aplicación

cleft que satisface que $\gamma(1) = 1$), que (B, s) es un producto cruzado y que la aplicación γ es la inclusión $h \mapsto 1\#h$. Para todo $a\#h \in A\#H$ vale que

$$\beta_B(B\otimes\gamma)(a\otimes h\otimes l) = (a\#h)(1\#l_{(1)})\otimes l_{(2)} = (A\otimes\beta_H)\circ T_A^{H\otimes^c H}(f)(a\otimes h\otimes l).$$

Dado que $\beta_B\circ(B\otimes\gamma)$ y β_H son aplicaciones biyectivas y $T_A^{H\otimes^c H}$ es un antiisomorfismo de álgebras, se concluye que f es inversible respecto de la convolución.

3) $\Rightarrow$ 1) Podemos asumir que $(B, s) = (A\#_f H, \widehat{s_A})$ para algún producto cruzado $A\#_f H$ con cociclo inversible respecto de la convolución. Sea

$$\gamma\colon H \longrightarrow A\#_f H$$

la función $\gamma(h) := 1\#h$. Para todo $a\#h \in A\#_f H$ y todo $l \in H$,

$$T^H_{A\#_f H}(\gamma)(a\otimes h\otimes l) = (a\#h)(1\#l_{(1)})\otimes l_{(2)} = (A\otimes\beta_H)\circ T_A^{H\otimes^c H}(f)(a\otimes h\otimes l).$$

Como $(A\otimes\beta_H)\circ T_A^{H\otimes^c H}(f)$ es biyectiva y $T^H_{A\#_f H}$ es un antiisomorfismo de álgebras, concluímos que γ es inversible respecto de la convolución.

Resta probar el item (5). Por el item (4), los comentarios debajo de [**17**, Definition 10.5] y la prueba del Teorema 10.6 de [**17**], sabemos que ϕ es biyectiva, que

$$\phi^{-1}(b) = b_{(0)}\gamma^{-1}(b_{(1)})\otimes b_{(2)},$$

y que las aplicaciones $\rho\colon H\otimes A \to A$ y $\sigma\colon H\otimes H \to A$ están dadas por

$$\rho(h\otimes a) := (A\otimes\epsilon)\circ\phi^{-1}(\gamma(h)i(a)) \quad \text{y} \quad \sigma(h\otimes l) := (A\otimes\epsilon)\circ\phi^{-1}(\gamma(h)\gamma(l)).$$

Debemos comprobar que ρ y σ satisfacen (7.13) y (7.14), respectivamente. Sea f como en el Lema 2.86. Puesto que

$$\begin{aligned}
\mu_B\circ(\gamma\otimes i) &= \mu_B\circ(\mu_B\otimes\eta_B\circ\epsilon)\circ(B\otimes i\otimes H)\circ(\gamma\otimes s_A)\circ(\Delta\otimes A)\\
&= \mu_B\circ(B\otimes\mu_B)\circ(B\otimes\gamma^{-1}\otimes\gamma)\circ(\mu_B\otimes\Delta)\circ(B\otimes i\otimes H)\circ(\gamma\otimes s_A)\circ(\Delta\otimes A)\\
&= \mu_B\circ(\mu_B\otimes\mu_B)\circ(\gamma\otimes i\otimes\gamma^{-1}\otimes\gamma)\circ(H\otimes s_A\otimes H)\circ(\Delta\otimes s_A)\circ(\Delta\otimes A)\\
&= \mu_B\circ(f\otimes\gamma)\circ(H\otimes s_A)\circ(\Delta\otimes A),
\end{aligned}$$

y por el Lema 2.86, sabemos que $\mu_B\circ(f\otimes\gamma) = \phi\circ(i^{-1}\circ f\otimes H)$, tenemos

$$\begin{aligned}
\rho &= (A\otimes\epsilon)\circ\phi^{-1}\circ\mu_B\circ(\gamma\otimes i)\\
&= (A\otimes\epsilon)\circ\phi^{-1}\circ\mu_B\circ(f\otimes\gamma)\circ(H\otimes s_A)\circ(\Delta\otimes A)\\
&= (A\otimes\epsilon)\circ(i^{-1}\circ f\otimes H)\circ(H\otimes s_A)\circ(\Delta\otimes A)\\
&= \mu_B\circ(\mu_B\otimes B)\circ(\gamma\otimes i\otimes\gamma^{-1})\circ(H\otimes s_A)\circ(\Delta\otimes A).
\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}
\sigma &= (A\otimes\epsilon)\circ\phi^{-1}\circ\mu_B\circ(\gamma\otimes\gamma)\\
&= \mu_B\circ(B\otimes\gamma^{-1})\circ\nu\circ\mu_B\circ(\gamma\otimes\gamma)\\
&= \mu_B\circ(B\otimes\gamma^{-1})\circ(\mu_B\otimes\mu_H)\circ(B\otimes s\otimes B)\circ(\nu\otimes\nu)\circ(\gamma\otimes\gamma)\\
&= \mu_B\circ(\mu_B\otimes\gamma^{-1})\circ(\gamma\otimes\gamma\otimes\mu_H)\circ\Delta_{H\otimes^c H},
\end{aligned}$$

como deseamos. □

Sea $A\#_f H$ un producto cruzado con cociclo normal inversible respecto de la convolución. Sea $\gamma\colon H \to A\#_f H$ la aplicación cleft $h \mapsto 1\#h$. La función $\gamma\circ\mu$ es inversible respecto de la convolución, puesto que γ lo es y $\mu\colon H\otimes^c H \to H$ es un morfismo de coálgebras. Además,

$$(\gamma\circ\mu)^{-1} = \gamma^{-1}\circ\mu.$$

Por otro lado, es fácil ver que

$$\mu_{A\#_f H} \circ (\gamma \otimes \gamma) = (f \otimes 1_H) * (\gamma^{-1} \circ \mu).$$

Por lo tanto,

$$f \otimes 1_H = (\mu_{A\#_f H} \circ (\gamma \otimes \gamma)) * (\gamma^{-1} \circ \mu). \tag{7.16}$$

Esto da una fórmula para f en términos de γ. Ahora obtendremos una fórmula para la inversa de γ respecto de la convolución. En la demostración del Teorema 2.87 vimos que

$$\gamma^{-1} = (T^H_{A\#_f H})^{-1} \circ (T_A^{H\otimes^c H}(f^{-1}) \circ (A \otimes \beta_H^{-1})),$$

donde f^{-1} denota la inversa respecto de la convolución de $f\colon H \otimes^c H \to A$. Realizando las cuentas correspondientes, es posible comprobar que

$$\gamma^{-1}(h) = (f^{-1} \otimes H) \circ (S \otimes H \otimes S) \circ (H \otimes c) \circ (c \otimes H) \circ (\Delta \otimes H) \circ \Delta(h).$$

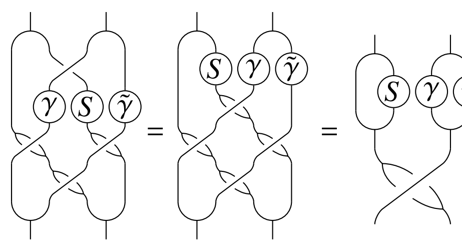
Lema 2.88. *Sea $(A \hookrightarrow B, s)$ una H-extensión con aplicación cleft $\gamma\colon (H, c) \to (B, s)$. Si S es biyectiva, entonces*

1. $(H \otimes \gamma^{-1}) \circ c^{-1} = s^{-1} \circ (\gamma^{-1} \otimes H)$.
2. $\nu \circ \gamma^{-1} = (\gamma^{-1} \otimes S) \circ c \circ \Delta$, *donde ν es la coacción de B.*

Demostración. (1) Es suficiente probar que

$$s \circ (H \otimes \gamma^{-1}) = (\gamma^{-1} \otimes H) \circ c.$$

La Figura 36, que vale porque



$= \eta_H \circ \epsilon \otimes \eta_B \circ \epsilon$

Figura 36

$$(\gamma \otimes S) \circ c = s \circ (S \otimes \gamma)$$

y por la compatibilidad de s con μ_H y μ_B, muestra que $s \circ (S \otimes \gamma^{-1})$ es una inversa a derecha de

$$s \circ (H \otimes \gamma)\colon H \otimes^c H \longrightarrow B \otimes_s H$$

respecto de la convolución. De modo similar podemos verificar que $(\gamma^{-1} \otimes S) \circ c$ es una inversa a izquierda de

$$(\gamma \otimes H) \circ c\colon H \otimes^c H \to B \otimes_s H$$

respecto de la convolución. Como $s \circ (H \otimes \gamma) = (\gamma \otimes H) \circ c$, esto implica que

$$s \circ (S \otimes \gamma^{-1}) = (\gamma^{-1} \otimes S) \circ c.$$

La primera afirmación se sigue inmediatamente de este hecho.

(2) Como $\nu\colon B \to B \otimes_s H$ es un morfismo de álgebras, $\nu \circ \gamma^{-1}$ es la inversa de

$$\nu \circ \gamma = (\gamma \otimes H) \circ \Delta.$$

Además, por la Figura 37, cuyas igualdades valen debido al ítem (1) del presente lema, la coaso-

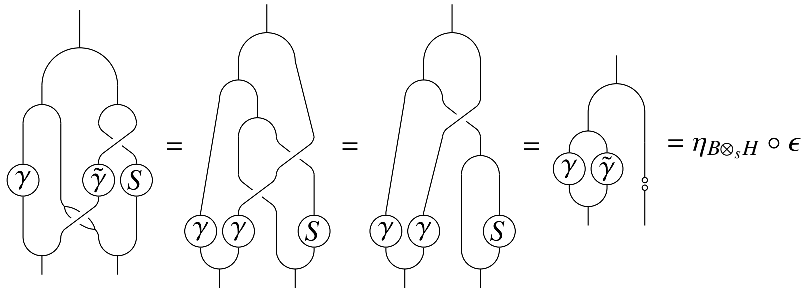


FIGURA 37

ciatividad de Δ y la compatibilidad de c con Δ y ϵ, sabemos que $(\gamma^{-1} \otimes S) \circ c \circ \Delta$ es una inversa a derecha de $\nu \circ \gamma$. Por lo tanto

$$(\gamma^{-1} \otimes S) \circ c \circ \Delta = \nu \circ \gamma^{-1},$$

como queremos. □

A continuación generalizaremos el resultado obtenido en la Proposición 2.54.

PROPOSICIÓN 2.89. *Sea H un álgebra de Hopf trenzada, s una transposición de H sobre A, $\rho\colon H \otimes A \to A$ una s-acción débil y $f\colon H^2 \to A$ un cociclo normal compatible con s que satisface la condición de módulo torcido. Consideremos el producto cruzado $B := A\#_f H$, construido a partir de (s, ρ, f). Si S es biyectiva y f es inversible respecto de la convolución, entonces $B \simeq H \otimes A$ como A-módulos a derecha.*

DEMOSTRACIÓN. Sean

$$s_B\colon H \otimes B \longrightarrow B \otimes H \qquad \text{y} \qquad \tau_B\colon H \otimes B \longrightarrow B \otimes H$$

la transposición $s_B := (A \otimes c) \circ (s \otimes h)$ y el flip, respectivamente. Por la Proposición 2.38 sabemos que $(B^{\mathrm{op}}, \widetilde{s_B^{-1}})$ es un $\widetilde{H_c^{\mathrm{cop}}}$-comódulo álgebra con coacción $\widetilde{\nu} = \tau_B \circ \widetilde{s_B^{-1}} \circ \nu$, donde $\nu = A \otimes \Delta$. Afirmamos que $(B^{\mathrm{op}})^{\mathrm{co}\,H} = A^{\mathrm{op}}$. Es claro que $A^{\mathrm{op}} \subseteq (B^{\mathrm{op}})^{\mathrm{co}\,H}$. Dado que

$$B = (A \otimes k) \oplus (A \otimes \operatorname{Ker} \epsilon),$$

para verificar que vale la inclusión contraria será suficiente probar que

$$(B^{\mathrm{op}})^{\mathrm{co}\,H} \cap (A \otimes \operatorname{Ker} \epsilon) = 0.$$

Usando que

$$\tau \circ s^{-1} = (A \otimes \epsilon \otimes H) \circ \widetilde{\nu},$$

se ve inmediatamente que $\tau \circ s^{-1}$ y $A \otimes \eta_H \circ \epsilon$ coinciden en $(B^{\mathrm{op}})^{\mathrm{co}\,H}$. Por lo tanto la función $\tau \circ s^{-1}$ se anula en

$$(B^{\mathrm{op}})^{\mathrm{co}\,H} \cap (A \otimes \operatorname{Ker} \epsilon).$$

En consecuencia, como $\tau \circ s^{-1}$ es una aplicación inyectiva,

$$(B^{\mathrm{op}})^{\mathrm{co}\,H} \cap (A \otimes \operatorname{Ker} \epsilon) = 0.$$

Así, $(A^{\mathrm{op}} \hookrightarrow B^{\mathrm{op}}, \widetilde{s_B^{-1}})$ es una $\widetilde{H_c^{\mathrm{cop}}}$-extensión de A^{op}. Sea

$$\gamma\colon (H, c) \longrightarrow (B, s)$$

la aplicación definida por $\gamma(h) := 1\#h$. Por el Teorema 2.87 sabemos que γ es un morfismo de H-comódulos a derecha inversible respecto de la convolución. Denotemos con $\bar{S}$ a la inversa de S respecto de la composición. Las igualdades

$$\mu_{B^{\mathrm{op}}} \circ (\gamma^{-1} \circ \bar{S} \otimes \gamma \circ \bar{S}) \circ \Delta_{\widetilde{H_c^{\mathrm{cop}}}} = \mu_B \circ (\gamma \circ \bar{S} \otimes \gamma^{-1} \circ \bar{S}) \circ c^{-1} \circ \Delta$$

$$
\begin{aligned}
&= \mu_B \circ (\gamma \otimes \gamma^{-1}) \circ \Delta \circ \bar{S}\\
&= \eta_B \circ \epsilon
\end{aligned}
$$

muestran que $\gamma^{-1} \circ \bar{S}$ es una inversa a izquierda de $\gamma \circ \bar{S} : \widetilde{H_c^{\mathrm{cop}}} \to \mathrm{B}^{\mathrm{op}}$ respecto de la convolución. Análogamente, $\gamma^{-1} \circ \bar{S}$ es también una inversa a derecha de $\gamma \circ \bar{S}$. Además, por el ítem (1) del Lema 2.88 y el hecho de que

$$(\bar{S} \otimes H) \circ \tau \circ c^{-1} \circ \tau = \tau \circ c^{-1} \circ \tau(H \otimes \bar{S}),$$

valen las igualdades

$$
\begin{aligned}
(\gamma \circ \bar{S} \otimes H) \circ \tilde{c}^{-1} &= (\gamma \circ \bar{S} \otimes H) \circ \tau \circ c^{-1} \circ \tau\\
&= \tau_B \circ (\gamma \otimes H) \circ \tau \circ c^{-1} \circ \tau \circ (H \otimes \bar{S})\\
&= \tau_B \circ s_B^{-1} \circ \tau_B \circ (H \otimes \gamma \circ \bar{S})\\
&= \widetilde{s_B^{-1}} \circ (H \otimes \gamma \circ \bar{S}).
\end{aligned}
$$

Finalmente, por el Lema 2.88 y el hecho de que

$$\tau \circ c^{-1} \circ (\bar{S} \otimes H) = (\bar{S} \otimes H) \circ \tau \circ c^{-1},$$

es verdad que

$$
\begin{aligned}
\tilde{\nu} \circ \gamma^{-1} \circ \bar{S} &= \tau_B \circ \widetilde{s_B^{-1}} \circ \nu \circ \gamma^{-1} \circ \bar{S}\\
&= \tau_B \circ \widetilde{s_B^{-1}} \circ (\gamma^{-1} \otimes S) \circ c \circ \Delta \circ \bar{S}\\
&= \tau_B \circ \widetilde{s_B^{-1}} \circ (\gamma^{-1} \otimes S) \circ (\bar{S} \otimes \bar{S}) \circ \Delta\\
&= \tau_B \circ \widetilde{s_B^{-1}} \circ (\gamma^{-1} \circ \bar{S} \otimes H) \circ \Delta\\
&= (\gamma^{-1} \circ S \otimes H) \circ \tau \circ c^{-1} \circ \Delta\\
&= (\gamma^{-1} \circ S \otimes H) \circ \Delta_{\widetilde{H_c^{\mathrm{cop}}}}.
\end{aligned}
$$

Así, $(A^{\mathrm{op}} \hookrightarrow B^{\mathrm{op}}, \widetilde{s_B^{-1}})$ es cleft vía

$$\gamma^{-1} \circ \bar{S} : (\widetilde{H_c^{\mathrm{cop}}}, \tilde{c}^{-1}) \longrightarrow (B^{\mathrm{op}}, \widetilde{s_B^{-1}}).$$

Consecuentemente, por el Teorema 2.87, la aplicación

$$\phi\colon A^{\mathrm{op}} \otimes \widetilde{H_c^{\mathrm{cop}}} \longrightarrow B^{\mathrm{op}},$$

dada por $\phi(a \otimes h) = a(\gamma^{-1} \circ \bar{S}(h))$, es un isomorfismo de A^{op}-módulos a izquierda. Esto implica que $H \otimes A \simeq B$ como A-módulos a derecha, vía $h \otimes a \mapsto \gamma^{-1} \circ \bar{S}(h)a$. □

8. Teorema de Maschke

En [**21**] el teorema clásico de Maschke sobre la semisimplicidad de las álgebras de grupos fue extendido a las álgebras de Hopf. Una k-álgebra de Hopf de dimensión finita es semisimple si y sólo si $\epsilon(x) \neq 0$ para una integral a izquierda x de H. La demostración sigue un argumento similar al utilizado en la prueba clásica de Maschke. Utilizando una extensión de este argumento, en [**7**, Teorema 4] se probó que si A y H son semisimples y artinianos, entonces el producto apareado $A\#H$ también lo es. En [**4**] este teorema fue generalizado a productos cruzados en el sentido de [**3**], con cociclo inversible. Sea ahora H un álgebra de Hopf trenzada y $s\colon H\otimes A \to A\otimes H$ una transposición. En esta sección mostraremos que el teorema de Maschke sigue siendo válido para productos cruzados $A\#_f H$ construidos a partir de una s-acción débil $h\otimes a \to h\cdot a$ y un cociclo

f, inversible respecto de la convolución, que es compatible con s. Esto generaliza el Teorema 5.1 de [**17**], donde el caso considerado era aquel en el que H es un álgebra de Hopf estándar.

Teorema 2.90. *Sea H un álgebra de Hopf semisimple, s una transposición de H sobre A, $h \otimes a \to h \cdot a$ una s-acción débil de H sobre A y $f\colon H^2 \to A$ un cociclo normal compatible con s que satisface la condición de módulo torcido. Sea $A\#_f H$ el producto cruzado construido a partir de esos datos. Las siguientes afirmaciones son verdaderas:*

1. *Si V es un $A\#_f H$-módulo a izquierda y $W \subseteq V$ es un submódulo que tiene complemento en la categoría de A-módulos, entonces W tiene complemento en la categoría de $A\#_f H$-módulos.*
2. *Si A es artiniana y semisimple, entonces también lo es $A\#_f H$.*

Demostración. Claramente (1) implica (2). Para probar (1), consideremos una proyección A-lineal $\pi\colon V \to W$ y elijamos $t \in \int_H^r$ con $\epsilon(t) = 1$. Sea $\tilde{\pi}\colon V \to W$ la aplicación definida por

$$\tilde{\pi}(v) = \sum_{(t)} \gamma^{-1}(t_{(1)})\pi(\gamma(t_{(2)})v) \quad \text{para todo } v \in V,$$

donde $\gamma\colon H \to A\#_f H$ es la aplicación definida por $\gamma(h) = 1\#h$. Es evidente que $\tilde{\pi}$ es una proyección de V sobre W. Debemos ver que $\tilde{\pi}$ es A-lineal y H-lineal. La primera afirmación fue probada en [**17**, Teorema 5.1]. Veamos que la segunda también se cumple. Afirmamos que valen las igualdades de la Figura 38. En efecto, la primera se sigue de la definición de $\tilde{\pi}$ y del hecho de que V es un $A\#_f H$-módulo a izquierda, la segunda de la definición de la multiplicación de $A\#_f H$, la tercera del hecho de que π es A-lineal, la cuarta se sigue de (7.16) y del hecho de que V es un $A\#_f H$-módulo, la quinta se sigue de la coasociatividad de Δ, y la sexta del hecho de que c es compatible con la comultiplicación. Por otro lado, por el Corolario 1.24 y el comentario que sigue al Teorema 1.28,

$$\begin{aligned}(H \otimes \mu \otimes \mu) \circ (H \otimes \Delta_{H \otimes^c H}) \circ (c \otimes H) \circ (H \otimes \Delta)(t \otimes h) &= h_{(1)} \otimes \Delta(th_{(2)}) \\ &= h_{(1)} \otimes \Delta(t\epsilon(h_{(2)})) \\ &= h \otimes \Delta(t).\end{aligned}$$

Combinando estos dos hechos obtenemos que $\tilde{\pi}(\gamma(h)v) = \gamma(h)\gamma^{-1}(t_{(1)})\pi(\gamma t_{(2)}v) = \gamma(h)\tilde{\pi}(v)$ para todo $h \in H, v \in V$, tal como se deseaba. $\square$

9. Equivalencia de productos cruzados

El propósito de esta sección es dar condiciones necesarias y suficientes para que dos productos cruzados sean equivalentes. Como corolario obtendremos que un producto cruzado $A\#_f H$ es equivalente a uno de la forma $A_f^s[H]$ si y sólo si la acción es interna (véase la Definición 2.95). Será conveniente trabajar en un contexto más general, permitiendo que $A\#_f H$ no sea necesariamente un álgebra asociativa.

Fijemos una k-álgebra asociativa con unidad A y una biálgebra trenzada H. Sean

- s una transposición de H sobre A,
- $\rho\colon H \otimes A \to A$ una aplicación que satisface las condiciones (2), (3) y (4) de la Observación 2.45, y
- $f\colon H^2 \to A$ una aplicación normal compatible con s.

Sea $A\#_f H$ la k-álgebra unitaria (no necesariamente asociativa) construida en la Definición 2.74 a partir de la terna (s, ρ, f). Afirmamos que

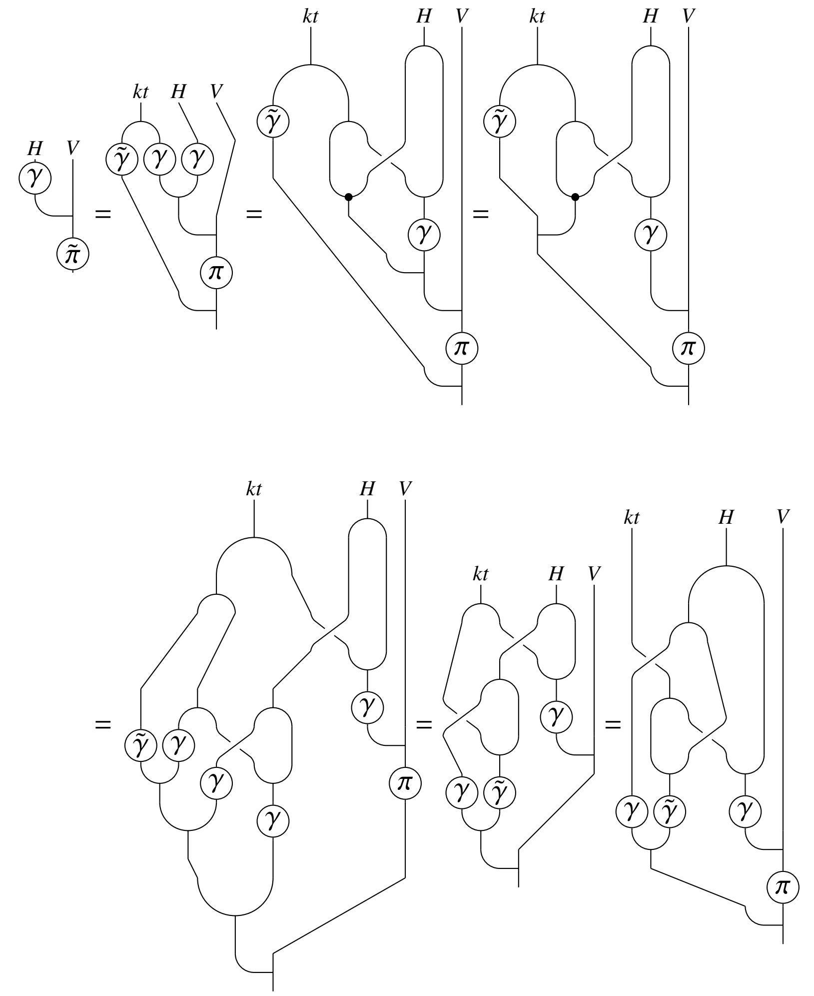


FIGURA 38

1. La aplicación
$$\hat{s} = (A \otimes c) \circ (s \otimes H) \colon H \otimes A\#_f H \longrightarrow A\#_f H \otimes H$$
satisface las propiedades requeridas en la Definición 2.2,
2. $A\#_f H$ es un H-comódulo a derecha vía
$$A \otimes \Delta \colon A\#_f H \to A\#_f H \otimes H$$
y $(A\#_f H)^{coH} = A$,
3. La función
$$A \otimes \Delta \colon A\#_f H \longrightarrow A\#_f H \otimes_{\hat{s}} H$$
es un morfismo de álgebras unitarias, donde $A\#_f H \otimes_{\hat{s}} H$ es $A\#_f H \otimes H$ con la multiplicación torcida por $\hat{s}$,
4. $A \otimes \Delta \colon (A\#_f H, \hat{s}) \longrightarrow (A\#_f H, \hat{s}) \otimes (H, c)$ es una aplicación en $\mathcal{B}_H$.

En efecto, es fácil ver que en las demostraciones de las Proposiciones 2.83 y 2.84 no se utiliza la asociatividad de $A\#_f H$. Así, tiene sentido decir que $(A\#_f H, \hat{s})$ es un H-comódulo algebra no necesariamente asociativa, y que $(A \subseteq A\#_f H, \hat{s})$ es una H-extensión de A. Finalmente, la noción de morfismo de H-comódulo álgebras unitarias es idéntica a la dada en el caso asociativo.

Definición 2.91. *Fijemos un álgebra de Hopf H y un álgebra A. Sean (s,ρ,f) y (s',ρ',f') ternas como la considerada arriba, y sean $(A \subseteq A\#_f H, \hat{s})$ y $(A \subseteq A\#_{f'} H, \hat{s'})$ las H-extensiones asociadas a (s,ρ,f) y (s',ρ',f'). Diremos que $(A \subseteq A\#_f H, \hat{s})$ y $(A \subseteq A\#_{f'} H, \hat{s'})$ son* equivalentes *si existe un isomorfismo de H-comódulo álgebras $g\colon (A\#_f H, \hat{s}) \longrightarrow (A\#_{f'} H, \hat{s'})$ que es una aplicación A-lineal a izquierda.*

Observación 2.92. *Si hay un morfismo A-lineal y H-colineal*

$$g\colon (A\#_f H, \hat{s}) \to (A\#_{f'} H, \hat{s'}),$$

entonces $s = s'$. En efecto, escribamos

$$s(h \otimes a) = \sum_i a_i \otimes h_i \qquad \text{y} \qquad s'(h \otimes a) = \sum_{i'} a_{i'} \otimes h_{i'}.$$

Un cálculo directo muestra que

$$\sum_{i'} a_{i'}\#1 \otimes h_{i'} = \hat{s'} \circ (H \otimes g)(h \otimes a\#1) = (g \otimes H) \circ \hat{s}(h \otimes a\#1) = \sum_i a_i\#1 \otimes h_i,$$

donde la primera y la tercera igualdad se siguen del hecho de que g es una aplicación A-lineal y $g(1\#1) = 1\#1$.

A pesar de esta observación, seguiremos utilizando las notaciones s y s' para enfatizar la diferencia entre $\hat{s}$ y $\hat{s'}$, las cuales no son idénticas como transposiciones, porque los productos de $A\#_f H$ y $A\#_{f'} H$ son diferentes.

Sea $g\colon A \otimes H \longrightarrow A \otimes H$ una aplicación A-lineal y H-colineal. Por la definición de la coacción ν de $A \otimes H$, es cierto que

$$\begin{aligned} g(1 \otimes h) &= (A \otimes \epsilon \otimes H) \circ \nu \circ g(1 \otimes h) \\ &= (A \otimes \epsilon \otimes H) \circ (g \otimes H) \circ \nu(1 \otimes h) \\ &= (A \otimes \epsilon) \circ g(1 \otimes h_{(1)}) \otimes h_{(2)}. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$g(a \otimes h) = ag(1 \otimes h) = au(h_{(1)}) \otimes h_{(2)} \quad \text{para todo } a \in A \text{ y } h \in H,$$

donde $u(h) = (A \otimes \epsilon) \circ g(1 \otimes h)$. Esto da una correspondencia biyectiva entre las aplicaciones de H en A y las aplicaciones A-lineales y H-colineales de $A \otimes H$ en $A \otimes H$. Afirmamos que g es biyectiva si y sólo si u es inversible respecto de la convolución y que, además, en este caso

$$g^{-1}(a \otimes h) = au^{-1}(h_{(1)}) \otimes h_{(2)} \quad \text{para todo } a \in A \text{ y } h \in H.$$

En efecto, supongamos que g es inversible. Sea

$$v(h) = (A \otimes \epsilon) \circ g^{-1}(1 \otimes h).$$

Aplicando $A \otimes \epsilon$ a ambos lados de la igualdad

$$1 \otimes h = g^{-1} \circ g(1 \otimes h) = g^{-1}(u(h_{(1)}) \otimes h_{(2)}) = u(h_{(1)})v(h_{(2)}) \otimes h_{(3)},$$

obtenemos que $u(h_{(1)})v(h_{(2)}) = \epsilon(h)1$. Un argumento similar muestra que $v(h_{(1)})u(h_{(2)}) = \epsilon(h)1$. Esto prueba que v es la inversa de u respecto de la convolución. Es evidente que la afirmación recíproca es verdadera.

En el siguiente teorema daremos condiciones necesarias y suficientes sobre u para que g sea un morfismo de H-comódulo álgebras.

Teorema 2.93. *Sean g y u como en el comentario anterior. La aplicación g es un morfismo de H-comódulo álgebras de $(A\#_f H, \hat{s})$ en $(A\#_{f'} H, \hat{s'})$ si y sólo si*

1. $u(1) = 1$.
2. $(u \otimes H) \circ c = s' \circ (H \otimes u)$,
3. $\mu \circ (A \otimes u) \circ \chi = \mu \circ (u \otimes \rho') \circ (\Delta \otimes A)$,
4. $\mu \circ (A \otimes u) \circ \mathcal{F} = \mu^2 \circ (\rho \otimes A^2) \circ (H \otimes u \otimes u \otimes f') \circ (H \otimes c \otimes H^2) \circ (\Delta \otimes H^2) \circ \Delta_{H \otimes^c H}$,

donde $\chi = (\rho \otimes H) \circ (H \otimes s) \circ (\Delta \otimes A)$, $\mathcal{F} = (f \otimes \mu) \circ \Delta_{H \otimes^c H}$ y $\mu \colon A^2 \to A$ es la multiplicación. Además, g es un isomorfismo si y sólo si u es inversible respecto de la convolución. En este caso, ρ es una s-acción débil y f es un cociclo que satisface la condición de módulo torcido si y sólo si ρ' y f' lo son.

Demostración. Asumamos que g es un morfismo de H-comódulo álgebras. De la igualdad $g(1\#1) = 1\#1$ se sigue que $u(1) = 1$, y aplicando $A \otimes \epsilon \otimes H$ a ambos lados de la igualdad

$$(g \otimes H) \circ \hat{s}(h \otimes 1\#l) = \hat{s'} \circ (H \otimes g)(h \otimes 1\#l), \quad \text{para todo } h, l \in H,$$

deducimos que $(u \otimes H) \circ c = s' \circ (H \otimes u)$. Además, dado que

$$g((1\#h)(a\#1)) = g(1\#h)g(a\#1) \quad \text{y} \quad g((1\#h)(1\#l)) = g(1\#h)g(1\#l)$$

para todo $a \in A$ y $h, l \in H$, valen las igualdades de la Figura 39; aplicandoles $A \otimes \epsilon$, obtenemos la

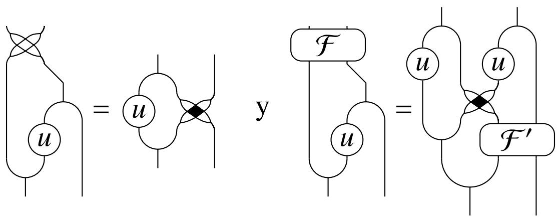


Figura 39

condición (3) y vemos que

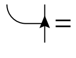
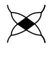
$$\mu \circ (A \otimes u) \circ \mathcal{F} = \mu \circ (\mu \otimes f') \circ (A \otimes \chi' \otimes H) \circ (u \otimes H \otimes u \otimes H) \circ (\Delta \otimes \Delta), \tag{9.17}$$

donde $\chi' = (\rho' \otimes H) \circ (H \otimes s') \circ (\Delta \otimes A)$.

Recíprocamente, supongamos que las condiciones (1)-(3) y (9.17) se satisfacen. Por la condición (1) sabemos que $g(1\#1) = 1\#1$ y a partir de la condición (2) se deduce fácilmente que

$$(g \otimes H) \circ \hat{s} = \hat{s'} \circ (H \otimes g).$$

Sean

 $= \rho'$,  $= f'$ y  $= \chi'$

Por la compatibilidad de s con la comultiplicación, la coasociatividad de Δ y la condición (3), sabemos que valen las igualdades de la Figura 40, y usando la coasociatividad de Δ, la compatibilidad de c con s y con la comultiplicación, las condiciones (2) y (4') y el hecho de que

$$\Delta \circ \mu = (\mu \otimes \mu) \circ (H \otimes c \otimes H) \circ (\Delta \otimes \Delta),$$

se ve que también valen las de la Figura 41. Usando estos hechos, la asociatividad de μ_A y la compatibilidad de χ' con μ_A, obtenemos la Figura 42, la cual demuestra que g preserva la multiplicación. Dado que los miembros izquierdos de las igualdades (4) y (4') son idénticos, para finalizar

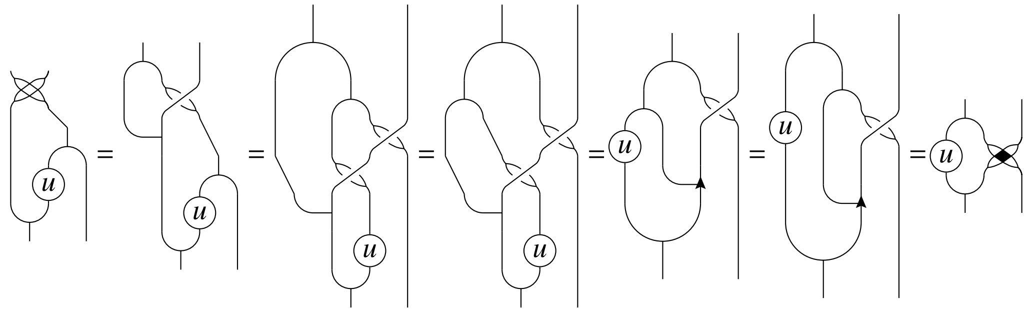


Figura 40

la prueba de la primera afirmación es suficiente verificar que si se satisfacen las condiciones (1)-(3), entonces los miembros derechos de (4) y (4') son iguales. Esto se demuestra en la Figura 43, cuyas igualdades valen debido a la coasociatividad de Δ y a las condiciones (2) y (3). Además los comentarios anteriores al enunciado del teorema muestra que g es un isomorfismo si y sólo si u es inversible respecto de la convolución. La última afirmación se sigue de los Teoremas 1.3, 2.47 y 2.73 y del hecho de que $A\#_f H$ es asociativa si y sólo si $A\#_{f'} H$ lo es. □

Corolario 2.94. *Sean $\rho,\rho',f,f',\chi,\mathcal{F},g$ y u como en el Teorema 2.93. Asumamos que u es inversible respecto de la convolución, $u(1)=1$, $(u\otimes H)\circ c = s'\circ(H\otimes u)$ y que ρ es una s-acción débil. Entonces g es una equivalencia entre $(A\#_f H,\hat{s})$ y $(A\#_{f'} H,\hat{s'})$ si y sólo si*

1. $\rho' = \mu\circ(\mu\otimes u)\circ(u^{-1}\otimes\chi)\circ(\Delta\otimes A)$,
2. $f' = \mu^2\circ(A\otimes\rho\otimes\mu)\circ(u^{-1}\otimes H\otimes u^{-1}\otimes A\otimes u)\circ(\Delta\otimes H\otimes\mathcal{F})\circ\Delta_{H\otimes^c H}$.

Demostración. Es evidente que al ser u inversible respecto de la convolución, el ítem (3) del Teorema 2.93 y el ítem (1) de este corolario son equivalentes. Por lo tanto, solamente necesitamos verificar que lo son el ítem (4) del teorema mencionado y el ítem (2) del corolario. Como el miembro derecho de la igualdad del ítem (4) del teorema previo es el producto por convolución de $\mu\circ(\rho\otimes A)\circ(H\otimes u\otimes u)\circ(H\otimes c)\circ(\Delta\otimes H)$ con f' en $\mathrm{Hom}_k(H\otimes^c H,A)$, para lograr esto es suficiente probar que la primera aplicación es inversible a izquierda para la convolución en $\mathrm{Hom}_k(H\otimes^c H,A)$ con inversa $\mu\circ(A\otimes\rho)\circ(u^{-1}\otimes H\otimes u^{-1})\circ(\Delta\otimes H)$. Esto se demuestra en la Figura 44, cuyas igualdades valen debido a la coasociatividad de Δ, la compatibilidad de Δ con c, el hecho de que $(u\otimes H)\circ c = s'\circ(H\otimes u)$, la coasociatividad de μ_A y los ítems (1) y (2) de la Observación 2.45. □

Definición 2.95. *Una s-acción débil $\rho\colon H\otimes A\to A$ es* interna *si existe una aplicación inversible respecto de la convolución $u\in\mathrm{Hom}_k(H,A)$, tal que*

$$(u\otimes H)\circ c = s\circ(H\otimes u)\quad y\quad \rho=\mu^2\circ(u\otimes A\otimes u^{-1})\circ(H\otimes s)\circ(\Delta\otimes A), \tag{9.18}$$

donde u^{-1} denota la inversa de u.

Sea $u\in\mathrm{Hom}_k(H,A)$ una aplicación inversible respecto de la convolución que satisface

$$(u\otimes H)\circ c = s\circ(H\otimes u),$$

y sea $g\colon A\otimes H\to A\otimes H$ la aplicación A-lineal y H-colineal definida por

$$g(a\otimes h) := au(h_{(1)})\otimes h_{(2)}.$$

Por los comentarios previos al Teorema 2.93 y la demostración de ese teorema,

$$(u\otimes H)\circ c = s\circ(H\otimes u) \Leftrightarrow (g\otimes H)\circ\hat{s} = \widehat{s'}\circ(H\otimes g)$$
$$\Leftrightarrow (g^{-1}\otimes H)\circ\widehat{s'} = \hat{s}\circ(H\otimes g^{-1})$$

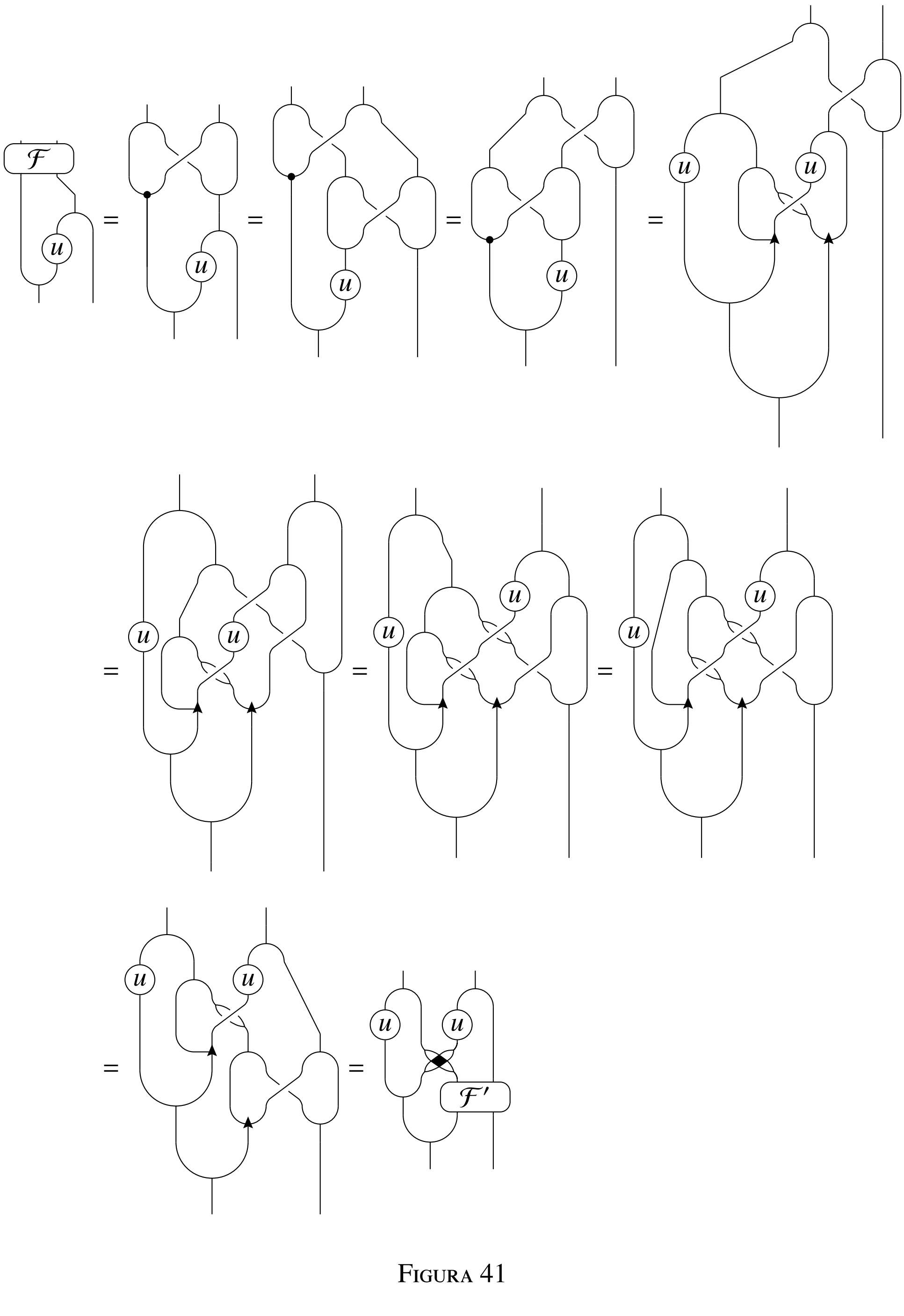


FIGURA 41

$$\Leftrightarrow (u^{-1} \otimes H) \circ c = s \circ (H \otimes u^{-1}).$$

Por lo tanto u^{-1} satisface la igualdad

$$(u^{-1} \otimes H) \circ c = s \circ (H \otimes u^{-1}).$$

Usando este hecho es fácil verificar que u define una s-acción débil vía la fórmula 9.18 si y sólo si $u(1)$ pertenece al centro $Z(A)$ de A.

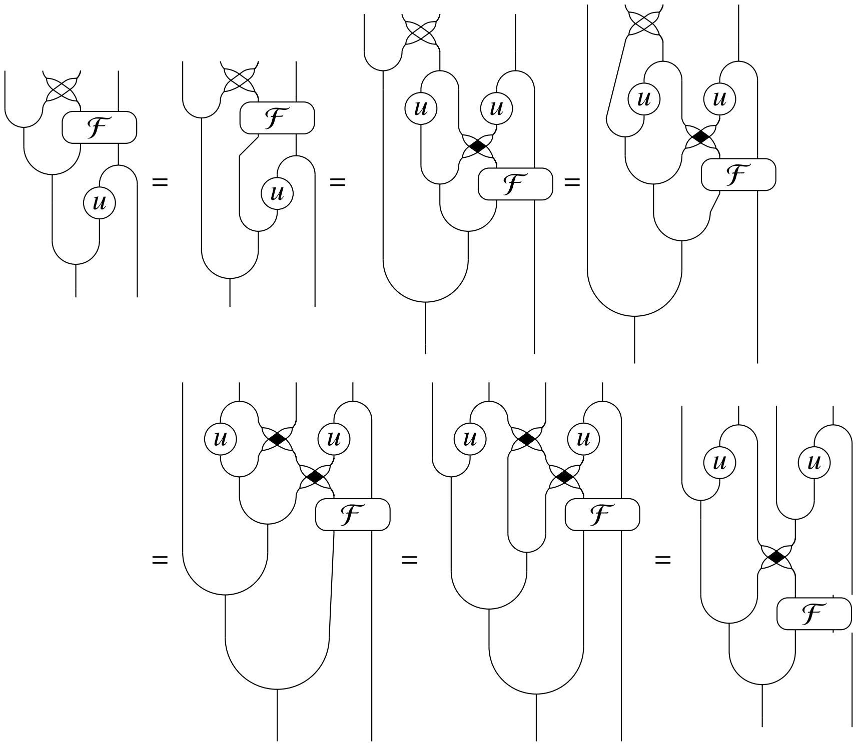


FIGURA 42

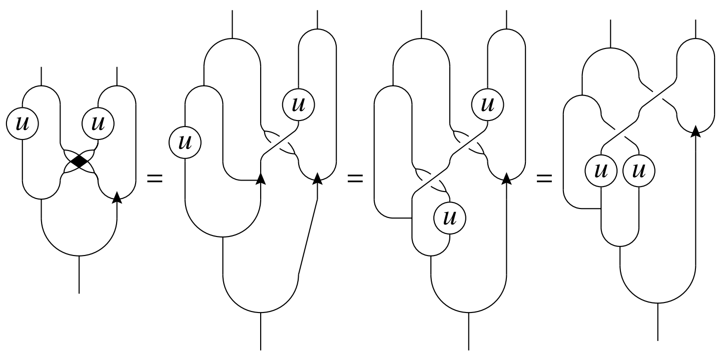


FIGURA 43

DEFINICIÓN 2.96. *Sean $u, v \in \mathrm{Hom}_k(H, A)$ aplicaciones inversibles respecto de la convolución, tales que*

$$(u \otimes H) \circ c = s \circ (H \otimes u), \quad (v \otimes H) \circ c = s \circ (H \otimes v), \quad u(1) \in Z(A) \quad y \quad v(1) \in Z(A).$$

Decimos que u es equivalente *a v y escribimos $u \simeq v$, si u y v inducen la misma s-acción de H sobre A.*

PROPOSICIÓN 2.97. *Sean u, v como en la Definicion 2.96. Entonces se cumple que:*

1. *$u \simeq w$, donde $w \in \mathrm{Hom}_k(H, A)$ es la aplicación $h \mapsto u(h)u(1)^{-1}$,*
2. *$u \simeq v$ si y sólo si $\mu_A^2 \circ (v^{-1} \otimes u \otimes A) \circ (\Delta \otimes A) = \mu_A^2 \circ (A \otimes v^{-1} \otimes u) \circ (A \otimes \Delta) \circ s.$*

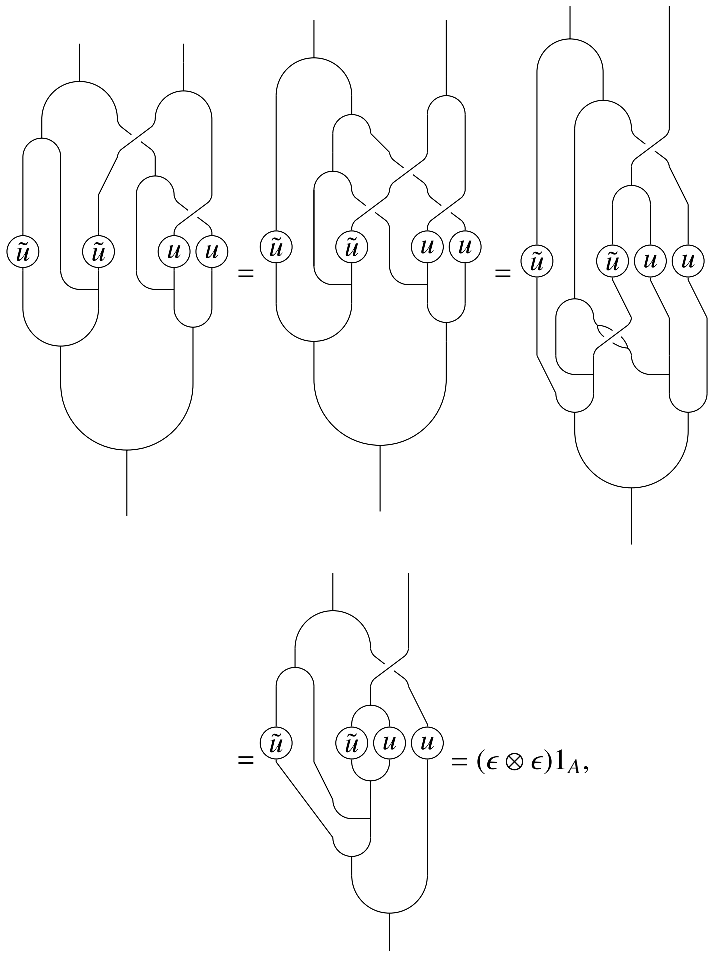


FIGURA 44

DEMOSTRACIÓN. La dejamos como ejercicio para el lector. □

PROPOSICIÓN 2.98. *Sea s una transposición de H sobre A, $\rho\colon H\otimes A\to A$ una s-acción débil y $f\colon H^2\to A$ una aplicación. Supongamos que ρ es interna vía $u\in \mathrm{Hom}_k(H,A)$. Asumamos que $u(1)=1$. Sea $f'\in \mathrm{Hom}_k(H^2,A)$ la función dada por*

$$f' := \mu^2\circ(A\otimes\rho\otimes\mu)\circ(u^{-1}\otimes h\otimes u^{-1}\otimes A\otimes u)\circ(\Delta\otimes H\otimes\mathcal{F})\circ\Delta_{H\otimes^c H},$$

donde $\mathcal{F}=(f\otimes\mu)\circ\Delta_{H\otimes^c H}$. Entonces f' es un cociclo normal compatible con s que satisface la condición de módulo torcido respecto de la acción trivial de H sobre A si y sólo si f es un cociclo normal compatible con s que satisface la condición de módulo torcido respecto de ρ. Además, en este caso,

$$(A\#_f H,\hat{s})\simeq(A_{s'}^{f'}[H],\widehat{s'}),$$

donde $s'=s$. Recíprocamente, si $(A\#_f H,\hat{s})\simeq(A_{s'}^{f'}H,\widehat{s'})$, entonces ρ es interna.

DEMOSTRACIÓN. Es evidente que f' es normal si y sólo si f lo es, y un cálculo directo prueba que f' es compatible con s si y sólo si f lo es. Las otras afirmaciones se siguen fácilmente del Corolario 2.94. □

Sea s una transposición de H sobre A. Supongamos dada una s-acción débil interna de H sobre A a partir de una aplicación $u \in \mathrm{Hom}_k(H, A)$ con $u(1) = 1$. La función $f\colon H^2 \to A$, definida por

$$f := (u \otimes u \otimes u^{-1} \circ \mu) \circ \Delta_{H \otimes^c H},$$

es un cociclo normal compatible con s que satisface la condición de módulo torcido. Llamamos a f el *cociclo interno* definido por u. Usando la Proposición 2.98 obtenemos que $A\#_f H \simeq A \otimes_s H$.

Capítulo 3

Elementos de traza 1

Sean H una k-álgebra de Hopf de dimensión finita y H^* la k-álgebra de Hopf dual de H. Es bien sabido que tener un H-comodulo a derecha es “lo mismo” que tener un H^*-módulo a izquierda. Entre las nociones de H-comódulo álgebra a derecha y de H^*-módulo álgebra a izquierda existe una dualidad similar. Más generalmente, estos resultados acerca de dualidad también valen para álgebras de Hopf rígidas en una categoría trenzada (ver por ejemplo [**31**, Proposition 2.7]. Nuestro principal propósito en este capítulo es extenderlos al contexto introducido en el Capítulo 2, y mostrar que muchos de los resultados establecidos en [**8**] y [**7**], siguen valiendo en este contexto.

Asumamos que H es una k-álgebra de Hopf trenzada rígida y escribamos $H^\dagger := H^{*\,\mathrm{op\,cop\,op\,cop}}$. Primero mostraremos que un par (V, s) es un H-espacio trenzado a izquierda si y sólo si $(V, (s^{-1})^\flat)$ es un H^*-espacio trenzado a izquierda, donde $(-)^\flat$ es el operador definido en los comentarios que preceden a la Definición 1.18. Similarmente, mostramos que si A es una k-álgebra, entonces

$$s\colon H \otimes A \longrightarrow A \otimes H$$

es una transposición si y sólo si

$$(s^{-1})^\flat\colon H^* \otimes A \longrightarrow A \otimes H^*$$

lo es. Luego, dada una función

$$\nu\colon V \longrightarrow V \otimes H,$$

definimos una función $\rho_\nu\colon H^\dagger \otimes V \longrightarrow V$, por

$$\rho_\nu := (V \otimes \mathrm{ev}_H) \circ ((s^{-1})^\flat \otimes H) \circ (H^\dagger \otimes \nu),$$

y mostramos que (V, s) es H-comódulo a derecha via ν si y sólo si $(V, (s^{-1})^\flat)$ es un $H^\dagger$-módulo a izquierda via ρ_ν. Además mostramos que si comenzamos con H-álgebra trenzada a izquierda (A, s) en lugar de con un H-espacio trenzado a izquierda (V, s), entonces (A, s) es un H-comódulo álgebra a derecha via ν si y sólo si $(A, (s^{-1})^\flat)$ es un $H^\dagger$-módulo álgebra via ρ_ν. Notemos que esto no funciona si usamos H^* en lugar de $H^\dagger$, como fue señalado por Takeuchi en [**31**, Proposition 2.7].

Sean H una k-álgebra de Hopf trenzada y (A, s) un H-módulo álgebra a izquierda. Hay dos k-álgebras asociativas asociadas con (A, s). El anillo de invariantes

$$^{H}\!A = \{a \in A : h \cdot a = \epsilon(h)a\}$$

y el producto semidirecto $A\#H$, que es el espacio vectorial $A\otimes H$, dotado con la multiplicación

$$(a\#h)(b\#l) = \sum_i ah_{(1)}\cdot b_i\#h_i l,$$

donde $\sum_i b_i\otimes h_i = s(h\otimes b)$ y, como es usual, $a\#h$ denota a $a\otimes h$. En el Capítulo 2 construímos un contexto Morita que relaciona las álgebras ${}^H\!A$ y $A\#H$. Usando los resultados mencionados arriba establecemos condiciones para que una o ambas de las aplicaciones $[-,-]$ y $(-,-)$ que definen este contexto sean sobreyectivas, y damos algunas aplicaciones. En particular generalizamos los Teoremas 1.2 y 1.2' de [**8**] y los Teoremas 1.8, 1.11 y 1.15 de [**7**].

1. Definición y propiedades básicas de $H^\dagger$

Definición 3.1. *Para cada biálgebra trenzada rígida H, denotamos con $H^\dagger$ a la biálgebra trenzada $H^\dagger := (H^*)^{\mathrm{op\,cop\,op\,cop}}$.*

Observación 3.2. *Notemos que la multiplicación y la comultiplicación de $H^\dagger$ son como las descriptas en el Teorema 1.29, pero intercambiando c y c^{-1}. Escribamos*

$$c_{H^\dagger H} := c_{H^*H}, \quad c_{HH^\dagger} := c_{HH^*} \quad y \quad c_{H^\dagger} := c_{H^*}.$$

Es sencillo verificar que $H^{\dagger\dagger} = H^{**}$ y que, si c es involutiva, entonces $H^\dagger = H^*$. Finalmente, cuando H es un álgebra de Hopf trenzada rígida, $S^2\colon H^\dagger \to H^*$ es un isomorfismo de álgebras de Hopf trenzadas y, por el Corolario 1.25,

$$\int_{H^\dagger}^l = \int_{H^*}^l \qquad y \qquad \int_{H^\dagger}^r = \int_{H^*}^r.$$

De ahora en mas los símbolos $\varphi \leftharpoonup h$ y $h \rightharpoonup \varphi$ denotaran las acciones estándares a izquierda y derecha de H sobre $H^\dagger$ dadas por

$$(\varphi \leftharpoonup h)(l) = \varphi(hl) \qquad \text{y} \qquad (h \rightharpoonup \varphi)(l) = \varphi(lh),$$

respectivamente.

Proposición 3.3 ([**13**, Teorema 3.b]). *Sean H un álgebra de Hopf trenzada rígida y ϕ una integral no nula a izquierda o a derecha de $H^\dagger$. La función $\vartheta\colon H \to H^\dagger$, definida por $\vartheta(h) := \phi \leftharpoonup h$, es un isomorfismo de H-módulos a derecha. Análogamente la función $\vartheta'\colon H \to H^\dagger$, definida por $\vartheta'(h) := h \rightharpoonup \phi$, es un isomorfismo de H-módulos a izquierda.*

Corolario 3.4. *Dada una integral no nula a izquierda o derecha ϕ of $H^\dagger$, existen $t \in \int_H^l$ y $u \in \int_H^r$ tales que $t \rightharpoonup \phi = \epsilon$ y $\phi \leftharpoonup u = \epsilon$. Esto es equivalente a decir que $\phi(t) = \phi(u) = 1$.*

Observación 3.5. *Sea H una biálgebra trenzada rígida. La biálgebra trenzada $H^\dagger$ actúa a izquierda sobre H vía*

$$\varphi \hookrightarrow h := \sum_i h_{(1)_i}\varphi(h_{(2)_i}), \quad donde \sum_i h_{(2)_i}\otimes h_{(1)_i} = c^{-1}(h_{(1)}\otimes h_{(2)}).$$

Análogamente, $H^\dagger$ actúa a la derecha sobre H vía

$$h \hookleftarrow \varphi := \sum_i \varphi(h_{(1)_i})h_{(2)_i}.$$

Componiendo estas acciones con la biyección canónica $H \to H^{\dagger\dagger}$ recuperamos las acciones estándares a izquierda y derecha de $H^\dagger$ sobre $H^{\dagger\dagger}$. Asumamos ahora que H es un álgebra de

Hopf trenzada rígida. Entonces, por el Corolario 3.4, para cada integral no nula a izquierda o a derecha l de H existen

$$T \in \int_{H^\dagger}^{l} \qquad y \qquad U \in \int_{H^\dagger}^{r}$$

tales que $T \hookleftarrow l = 1$ *y* $l \hookrightarrow U = 1$. *Observemos que esto es equivalente a que* $T(l) = U(l) = 1$. *Dado que* $(H_c^{\mathrm{cop}})^\dagger = (H^*)^{\mathrm{op}}$, *aplicando este resultado a* H_c^{cop} *y teniendo en cuenta los resultados del Corolario 3.4 y la Definición 3.1, obtenemos que existen*

$$T' \in \int_{H^\dagger}^{l} \qquad y \qquad U' \in \int_{H^\dagger}^{r}$$

tales que $l_{(1)}T'(l_{(2)}) = 1$ *y* $U'(l_{(1)})l_{(2)} = 1$. *Como*

$$T'(l) = 1 = T(l) \qquad y \qquad U'(l) = 1 = U(l),$$

vale que $T' = T$ *y* $U' = U$.

Observación 3.6. *Sean H un álgebra de Hopf trenzada rígida y* α *la función modular de H. Para cada* $h \in H$, *escribimos* $h^\alpha := \alpha \hookleftarrow h$. *Así que*

$$h^\alpha = \sum_i h_{(1)_i}\alpha(h_{(2)_i}), \quad donde \sum_i h_{(2)_i} \otimes h_{(1)_i} = c^{-1}(h_{(1)} \otimes h_{(2)}).$$

Del Teorema 1.27 se sigue fácilmente que $h^\alpha = h_{(1)}\alpha(h_{(2)})$ *y que la aplicación* $h \mapsto h^\alpha$ *es un automorfismo de álgebras.*

Sean t una integral no nula a izquierda de H, α la función modular y $q \in k$ el escalar determinado por la igualdad $c(t \otimes t) = qt \otimes t$. Por el Lema 2.67 sabemos que $S(t) = qt_{(1)}\alpha(t_{(2)})$. Aplicando este resultado a H_c^{cop} obtenemos que

$$S^{-1}(t) = q^{-1} \sum_i \alpha(t_{(1)_i})t_{(2)_i},$$

donde $\sum_i t_{(2)_i} \otimes t_{(1)_i} = c^{-1}(t_{(1)} \otimes t_{(2)})$. Utilizaremos esta fórmula en la demostración de la siguiente proposición.

Proposición 3.7. *Sea H un álgebra de Hopf trenzada rígida. Si* $T \in \int_{H^\dagger}^{l}$ *y* $t \in \int_{H}^{l}$ *satisfacen que* $t \rightharpoonup T = \epsilon$, *entonces*

$$T \leftharpoonup t = \alpha, \quad T \leftharpoonup S^{-1}(t) = q^{-1}\epsilon, \quad T \hookleftarrow t = 1 \quad y \quad T \hookleftarrow S^{-1}(t) = q^{-1}1.$$

Demostración. Para cada $h \in H$ se cumple que

$$(T \leftharpoonup t)(h) = T(th) = \alpha(h)T(t) = \alpha(h).$$

Esto prueba que vale la primera fórmula. Veamos que vale la tercera. Para $h \in H$, sea

$$c^{-1}(\Delta(h)) = \sum_i h_{(2)_i} \otimes h_{(1)_i}.$$

Dado que

$$\sum_i \varphi(h_{(1)_i})T(h_{(2)_i}) = (\varphi T)(h) = \varphi(1)T(h),$$

donde φT es el producto en $H^\dagger$, tenemos que

$$\sum_i h_{(1)_i}T(h_{(2)_i}) = T(h)1.$$

Por lo tanto $T \hookleftarrow t = T(t)1 = 1$. Ahora probemos las igualdades segunda y cuarta. Por el comentario que precede a la presente proposición

$$T(S^{-1}(t)) = q^{-1}\sum_i \alpha(t_{(1)_i})T(t_{(2)_i}) = q^{-1}(\alpha T)(t) = T(S^{-1}(t)) = q^{-1}\alpha(1)T(t) = q^{-1}.$$

Por lo tanto,

$$(T \leftharpoonup S^{-1}(t))(h) = T(S^{-1}(t)h) = T(S^{-1}(t))\epsilon(h) = q^{-1}\epsilon(h)$$

for all $h \in H$, y

$$\begin{aligned} \varphi(T \looparrowleft S^{-1}(t)) &= \sum_i \varphi(S^{-1}(t)_{(1)_i})T(S^{-1}(t)_{(2)_i}) \\ &= (\varphi T)(S^{-1}(t)) \\ &= \varphi(1)T(S^{-1}(t)) \\ &= q^{-1}\varphi(1) \end{aligned}$$

para todo $\varphi \in H^\dagger$. De estos hechos se deduce que

$$T \leftharpoonup S^{-1}(t) = q^{-1}\epsilon \qquad \text{y} \qquad T \looparrowleft S^{-1}(t) = q^{-1}1,$$

como deseamos. □

Sean H un álgebra de Hopf trenzada rígida y ϕ una integral no nula a izquierda o a derecha de $H^\dagger$. Dada una función $\phi\colon H \to H$, denotamos con ϕ^* la transpuesta de ϕ. Sean

$$\widetilde{f^l_H}\colon H \to H \qquad \text{y} \qquad \widetilde{f^r_H}\colon H \to H$$

los automorfismos de H definidos por $f^l_{H^\dagger} := (\widetilde{f^l_H})^*$ y $f^r_{H^\dagger} := (\widetilde{f^r_H})^*$. Usando que

$$c^{-1}_{HH^\dagger} = (H \otimes H^\dagger \otimes \mathrm{ev}_H) \circ (H \otimes c_{H^\dagger} \otimes H) \circ (\mathrm{coev}_H \otimes H^\dagger \otimes H)$$

y

$$c_{H^\dagger H} = (H \otimes H^\dagger \otimes \mathrm{ev}_H) \circ (H \otimes c^{-1}_{H^\dagger} \otimes H) \circ (\mathrm{coev}_H \otimes H^\dagger \otimes H),$$

es fácil probar que $c_{HH^\dagger}(h \otimes \phi) = \phi \otimes (\widetilde{f^l_H})^{-1}(h)$ y $c_{H^\dagger H}(\phi \otimes h) = (\widetilde{f^r_H})^{-1}(h) \otimes \phi$.

2. Relaciones entre las transposiciones de H y de H^*

Sean H una biálgebra trenzada rígida y V un H-espacio trenzado a izquierda. Denotemos con los diagramas

 y ,

a la evaluación y la coevaluación de H, respectivamente. De la definición de $(s^{-1})^\flat$ se sigue inmediatamente que valen las igualdades de la Figura 1.

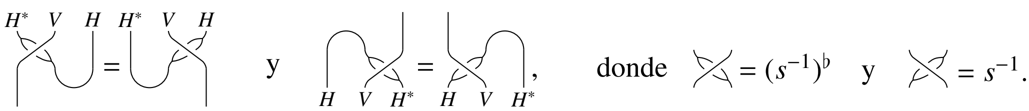


Figura 1

Sea H una biálgebra trenzada rígida, V un espacio vectorial y $s\colon H^* \otimes V \to V \otimes H^*$ una función biyectiva. Definimos la aplicación ${}^\flat(s^{-1})\colon H \otimes V \to V \otimes H$ por la igualdad

$${}^\flat(s^{-1}) := (\mathrm{ev}_H \circ c_{HH^*} \otimes V \otimes H) \circ (H \otimes s^{-1} \otimes H) \circ (H \otimes V \otimes c^{-1}_{H^*H} \circ \mathrm{coev}_H).$$

Un cálculo directo muestra que valen las igualdades de la Figura 2. Usando éste hecho y la definición de ${}^\flat(s^{-1})$ es fácil verificar que también valen las de la Figura 3

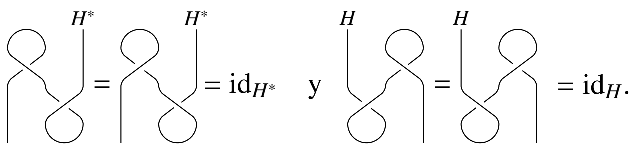


FIGURA 2

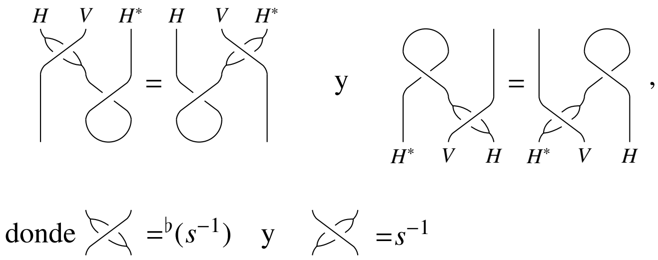


FIGURA 3

LEMA 3.8. *Sea H una biálgebra trenzada rígida. Para cada H-espacio trenzado a izquierda (V, s) vale que*

$$(V\otimes c^{-1}_{HH^*})\circ((s^{-1})^\flat\otimes H)\circ(H^*\otimes s) = (s\otimes H^*)\circ(H\otimes(s^{-1})^\flat)\circ(c^{-1}_{HH^*}\otimes V)$$

y

$$(V\otimes c_{H^*H})\circ((s^{-1})^\flat\otimes H)\circ(H^*\otimes s) = (s\otimes H^*)\circ(H\otimes(s^{-1})^\flat)\circ(c_{H^*H}\otimes V).$$

DEMOSTRACIÓN. La primera igualdad está probada en la Figura 4, cuyas igualdades valen por

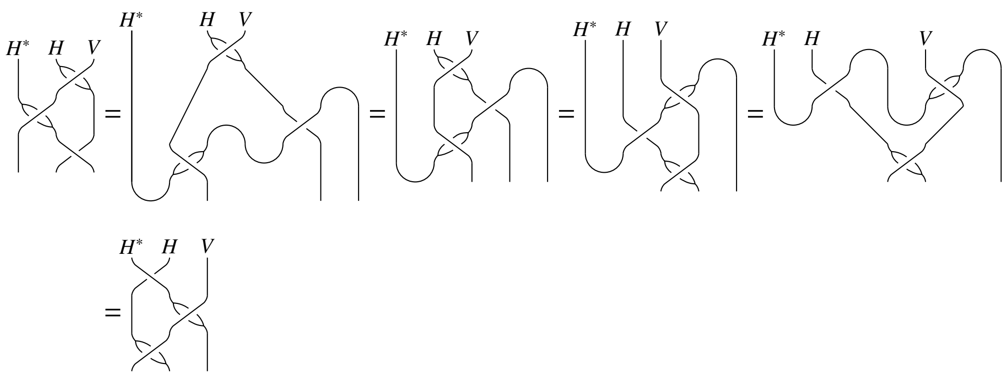


FIGURA 4

propiedades básicas de la evaluación y coevaluación y por el hecho de que (V, s) es un H-espacio trenzado a izquierda. La segunda puede verificarse de un modo similar. □

LEMA 3.9. *Sea H una biálgebra trenzada rígida. Para cada H^*-espacio trenzado a izquierda (V, s) se cumple que*

$$(V\otimes c^{-1}_{H^*H})\circ({}^\flat(s^{-1})\otimes H^*)\circ(H\otimes s) = (s\otimes H)\circ(H^*\otimes{}^\flat(s^{-1}))\circ(c^{-1}_{H^*H}\otimes V)$$

y

$$(V\otimes c_{HH^*})\circ({}^\flat(s^{-1})\otimes H^*)\circ(H\otimes s) = (s\otimes H)\circ(H^*\otimes{}^\flat(s^{-1}))\circ(c_{HH^*}\otimes V).$$

Demostración. La primera igualdad puede probarse reemplazando H^* por H, H por H^*, coev_H por $c^{-1}_{H^*H} \circ \mathrm{coev}_H$ y ev_H por $\mathrm{ev}_H \circ c_{HH^*}$ en los diagramas de la Figura 4 , lo que origina una figura igualmente válida. La segunda igualdad se prueba de modo similar. □

Proposición 3.10. *Sea H una biálgebra trenzada rígida. Las siguientes afirmaciones son verdaderas:*

1. *Si (V, s) es un H-espacio trenzado a izquierda, entonces $(V, (s^{-1})^\flat)$ es un H^*-espacio trenzado a izquierda.*
2. *Si (V, s) es un H^*-espacio trenzado a izquierda, entonces $(V, {}^\flat(s^{-1}))$ es un H-espacio trenzado a izquierda.*
3. *Las construcciones anteriores son inversas la una de la otra.*

Demostración. (1) Usando la definición de η_{H^*} y del hecho de que s^{-1} es compatible con ϵ_H es fácil verificar que $(s^{-1})^\flat$ es compatible con η_{H^*}. Análogamente, $(s^{-1})^\flat$ es compatible con ϵ_{H^*}. La compatibilidad de $(s^{-1})^\flat$ con μ_{H^*} está probada en la la Figura 5, que vale porque

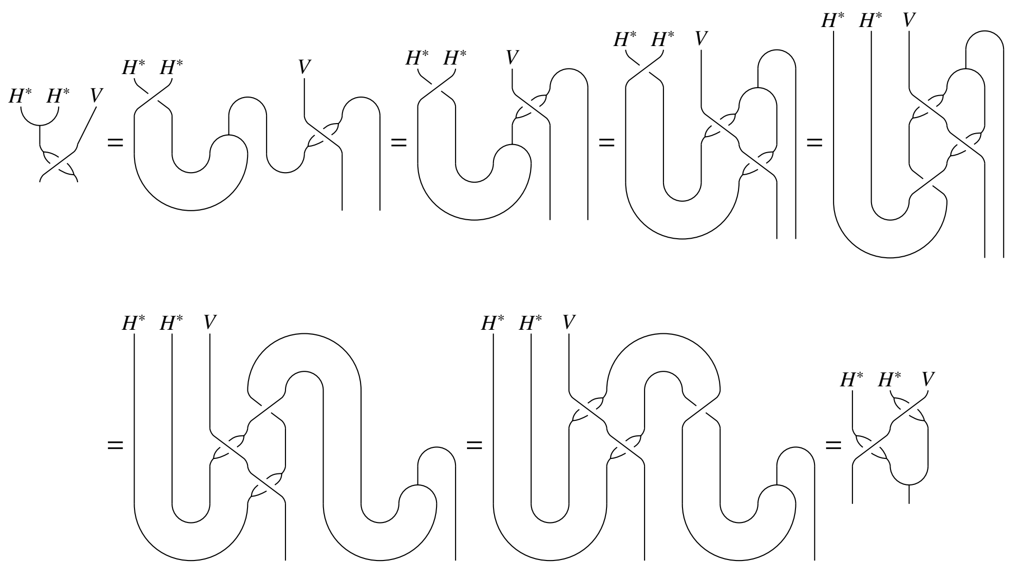


Figura 5

$$(H \otimes s^{-1}) \circ (s^{-1} \otimes H) \circ (V \otimes \Delta) = (\Delta \otimes V) \circ s^{-1}$$

y

$$(c \otimes V) \circ (H \otimes s^{-1}) \circ (s^{-1} \otimes H) = (H \otimes s^{-1}) \circ (s^{-1} \otimes H) \circ (V \otimes c).$$

La compatibilidad con Δ_{H^*} se puede comprobar dualizando la prueba de que $(s^{-1})^\flat$ es compatible con μ_{H^*}; y la compatibilidad con c_{H_*} está probada en la Figura 6, que vale por las definiciones de las aplicaciones involucradas en la cuenta y las propiedades básicas de la evaluación y la coevaluación.
La inversibilidad a derecha de $(s^{-1})^\flat$ se sigue de las igualdades de la Figura 7, que valen por los comentarios hechos al comienzo de esta sección, las propiedades básicas de las funciones de evaluación y coevaluación y el Lema 3.8. Finalmente, un argumento similar prueba que $(s^{-1})^\flat$ es inversible a izquierda.

(2) Usando la definición de ϵ_{H^*}, que η es compatible con c_{HH^*}, y que ϵ_{H^*} es compatible con s^{-1} y $c^{-1}_{H^*H}$, es fácil verificar que ${}^\flat(s^{-1})$ es compatible con η_H. Análogamente, ${}^\flat(s^{-1})$ es compatible con

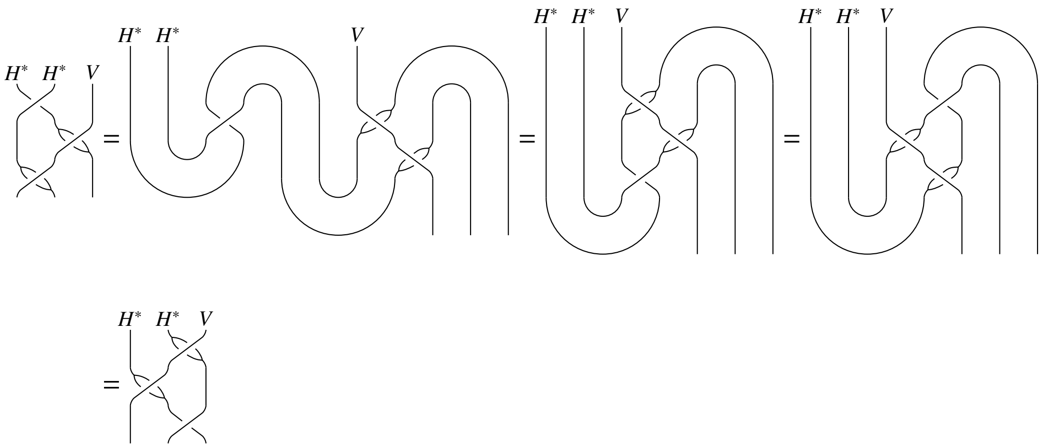


FIGURA 6

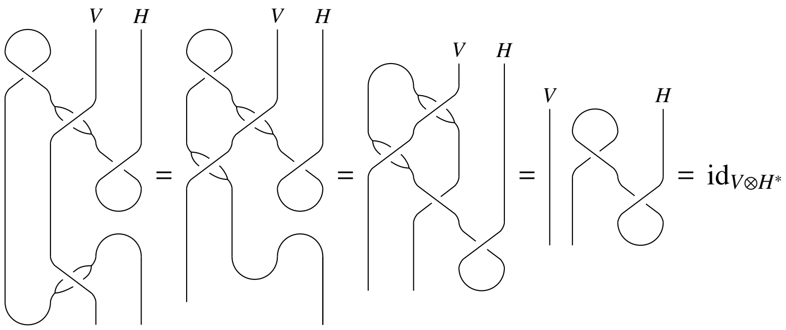


FIGURA 7

ϵ_H. Por la compatibilidad de $c^{-1}_{HH^*}$ con μ_H y a la definición de Δ_{H^*}, valen las igualdades de la Figura 8. De este hecho, las definiciones de $^{\flat}(s^{-1})$ y Δ_{H^*}, y la compatibilidad de $c^{-1}_{H^*} \circ \Delta_{H^*}$ con

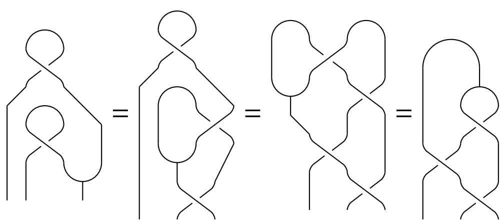


FIGURA 8

$c^{-1}_{HH^*}$ y s^{-1}, se sigue que valen de la la Figura 9, lo que muestra que $^{\flat}(s^{-1})$ es compatible con μ_H. La compatibilidad de $^{\flat}(s^{-1})$ con Δ_H puede probarse dualizando la prueba de la compatibilidad de $^{\flat}(s^{-1})$ con μ_H. La compatibilidad con c_H está probada en la Figura 10, cuyas igualdades valen por la compatibilidad de s^{-1} con c_{H^*}. Por último, la Figura 11, que vale por los comentarios previos al Lema 3.8, las propiedades básicas de la evaluación y coevaluación y el Lema 3.9, demuestra que $^{\flat}(s^{-1})$ es inversible a derecha.; y un argumento similar prueba que es inversible a izquierda.

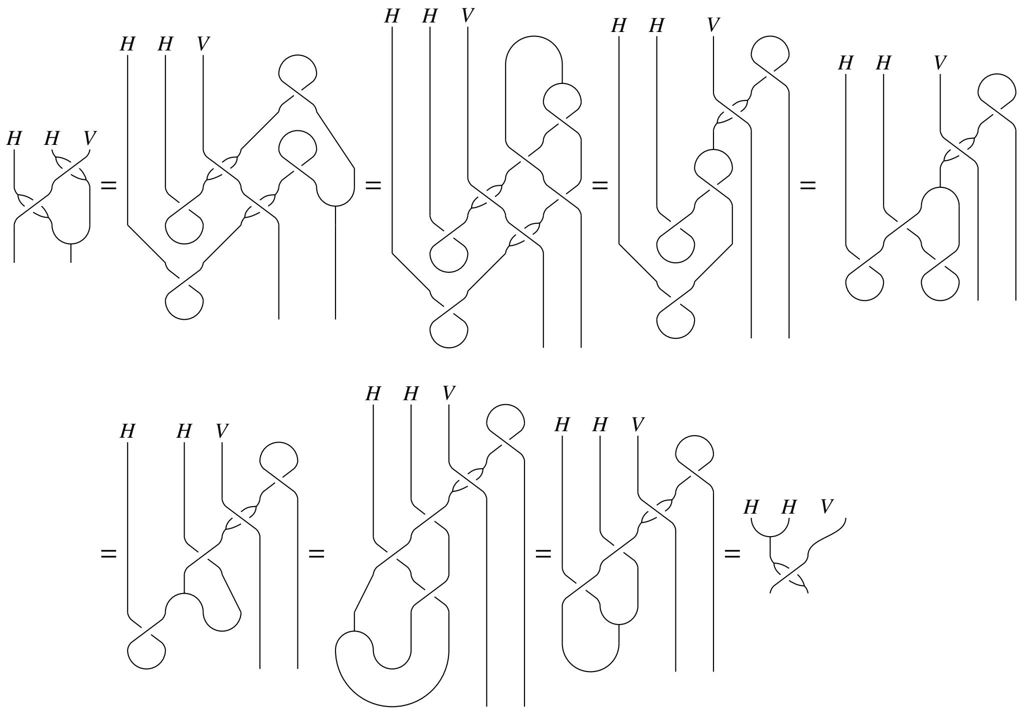


FIGURA 9

(3) Esto puede probarse utilizando las fórmulas para las inversas de $(s^{-1})^\flat$ y ${}^\flat(s^{-1})$ obtenidas en las pruebas de los ítems (1) y (2), respectivamente. $\square$

OBSERVACIÓN 3.11. *Sean H una biálgebra trenzada rígida y (V, s) un H-espacio trenzado a izquierda. En la prueba del item (1) of Proposition 3.10 se mostró que*

$$(H^* \otimes V \otimes \mathrm{ev}_H \circ c_{HH^*}) \circ (H^* \otimes s \otimes H^*) \circ (c^{-1}_{H^*H} \circ \mathrm{coev}_H \otimes V \otimes H^*)$$

es la inversa de $(s^{-1})^\flat$ respecto de la composición. Aplicando este resultado con H reemplazado por H^{op}, obtenemos que también

$$(H^* \otimes V \otimes \mathrm{ev}_H \circ c^{-1}_{H^*H}) \circ (H^* \otimes s \otimes H^*) \circ (c_{HH^*} \circ \mathrm{coev}_H \otimes V \otimes H^*)$$

es la inversa de $(s^{-1})^\flat$. Por lo tanto, ambas funciones son iguales. De modo análogo, podemos verificar que si (V, s) es un H^*-espacio trenzado a izquierda, entonces

$${}^\flat(s^{-1}) = (\mathrm{ev}_H \circ c^{-1}_{H^*H} \otimes V \otimes H) \circ (H \otimes s^{-1} \otimes H) \circ (H \otimes V \otimes c_{HH^*} \circ \mathrm{coev}_H).$$

OBSERVACIÓN 3.12. *Utilizando la última igualdad de la Observación 3.11, y razonando como en el comentario anterior al Lema 3.8, es fácil comprobar que valen las igualdades de la Figura 12.*

PROPOSICIÓN 3.13. *Sean H una biálgebra trenzada rígida y A un álgebra. Las siguientes afirmaciones son verdaderas:*

1. *Si $s\colon H \otimes A \to A \otimes H$ es una transposición a izquierda, entonces $(s^{-1})^\flat\colon H^* \otimes A \to A \otimes H^*$ también lo es.*
2. *Si $s\colon H^* \otimes A \to A \otimes H^*$ es una transposición a izquierda, entonces ${}^\flat(s^{-1})\colon H \otimes A \to A \otimes H$ también lo es.*

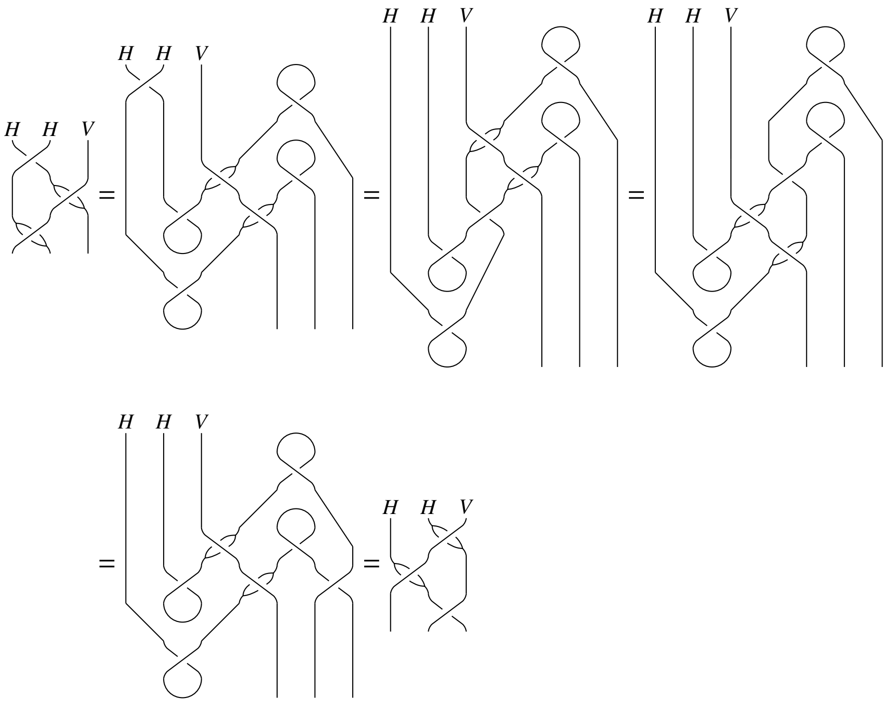


Figura 10

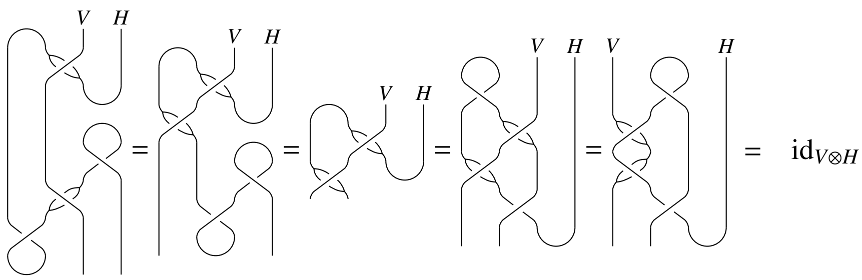


Figura 11

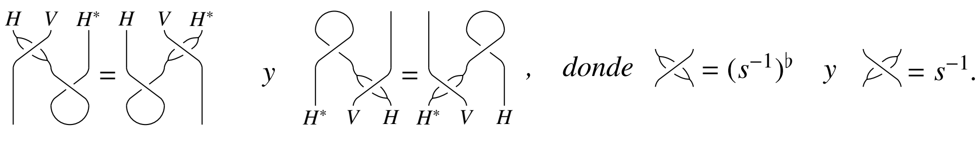


Figura 12

Demostración. Probamos la primera afirmación, y dejamos la segunda al lector. Por la Proposicion 3.10 solamente debemos verificar que $(s^{-1})^\flat$ es compatible con la estructura de álgebra de A. Es sencillo comprobar que es compatible con η_A. La compatibilidad con μ_A está demostrada en la Figura 13, la que, por la igualdad

$$(H\otimes\mu)\circ(s^{-1}\otimes A)\circ(A\otimes s^{-1}) = s^{-1}\circ(\mu\otimes H),$$

es verdadera. □

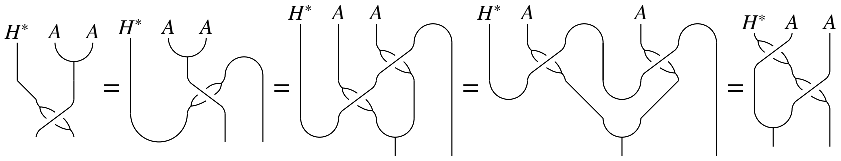


FIGURA 13

LEMA 3.14. *Sean H una biálgebra trenzada y (V, s) un H-espacio trenzado a izquierda. La siguiente igualdad vale:*

$$(s^{-1} \otimes H) \circ (V \otimes c^{-1}) \circ (V \otimes \Delta_H) \circ s = (H \otimes s) \circ (c^{-1} \otimes V) \circ (\Delta_H \otimes V).$$

DEMOSTRACIÓN. Como

$$(V \otimes c^{-1}) \circ (s \otimes H) \circ (H \otimes s) = (s \otimes H) \circ (H \otimes s) \circ (c^{-1} \otimes V),$$

las igualdades de la Figura 14 son ciertas. Esto prueba la afirmación. □

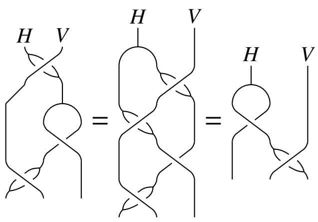


FIGURA 14

PROPOSICIÓN 3.15. *Sean H un álgebra de Hopf trenzada rígida, $s\colon H \otimes A \to A \otimes H$ una transposición a izquierda y $\theta\colon H^\dagger \to H$ la aplicación definida por $\theta(\varphi) = \varphi \rightharpoonup t$, donde t es una integral a izquierda no nula de H. Es verdad que $(A \otimes \theta) \circ (s^{-1})^\flat = s \circ (\theta \otimes g_s^{-1})$.*

DEMOSTRACIÓN. Por la definición de $(s^{-1})^\flat$ valen las igualdades de la Figura 15. Combinado

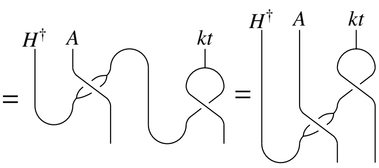
$(A \otimes \theta) \circ (s^{-1})^\flat =$ 

FIGURA 15

estas con el Lema 3.14 y el Teorema 2.20, se verifica que también valen las de la Figura 16, de la cual se sigue inmediatamente la proposición. □

COROLARIO 3.16. *Para cada álgebra de Hopf trenzada rígida H y cada transposición a izquierda*

$$s\colon H \otimes A \longrightarrow A \otimes H$$

es verdad que $g_{(s^{-1})^\flat} = g_s^{-1}$.

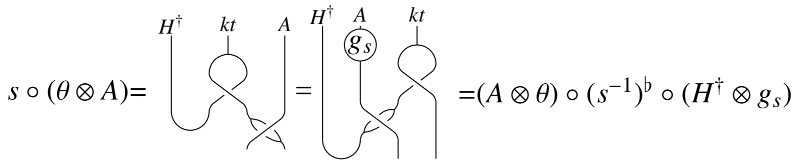


FIGURA 16

DEMOSTRACIÓN. Sea $T \in \int_{H^\dagger}^l$ tal que $\theta(T) = 1$. Por la Proposición 3.15,

$$g_{(s^{-1})^\flat}(a) \otimes 1 = (A \otimes \theta) \circ (s^{-1})^\flat (T \otimes a) = s \circ (\theta \otimes g_s^{-1})(T \otimes a) = g_s^{-1}(a) \otimes 1,$$

como queremos. □

OBSERVACIÓN 3.17. *Sea $\widetilde{f_H^r}$ como en los comentarios que siguen a la demostración de la Proposición 3.7. Por estos mismos comentarios sabemos que $\widetilde{f_H^r} = f_{H^\dagger}^r$. Consecuentemente, si $f_H^r = \mathrm{id}$, entonces $f_{H^\dagger}^r = \mathrm{id}$. Análogamente, $\widetilde{f_H^l} = f_{H^\dagger}^l$, y si $f_H^l = \mathrm{id}$, entonces $f_{H^\dagger}^l = \mathrm{id}$.*

3. Cómo pasar de acciones a coacciones y viceversa

Sea H una biálgebra trenzada. En esta sección estudiamos algunas relaciones entre los conceptos de H-módulo a izquierda y H-comódulo a derecha introducidos en el Capítulo 1.

Sean H una biálgebra trenzada rígida, (V, s) un H-espacio trenzado a izquierda y $H^\dagger$ como en la Definición 3.1. Dada una función $\nu\colon V \to V \otimes H$, definimos una aplicación $\rho_\nu\colon H^\dagger \otimes V \to V$ por

$$\rho_\nu := (V \otimes \mathrm{ev}_H) \circ ((s^{-1})^\flat \otimes H) \circ (H^\dagger \otimes \nu).$$

Recíprocamente, dada una función $\rho\colon H^\dagger \otimes V \to V$, definimos $\nu_\rho\colon V \to V \otimes H$ por

$$\nu_\rho := s \circ (H \otimes \rho) \circ (\mathrm{coev}_H \otimes V).$$

Es fácil verificar que estas construcciones son una inversa de la otra.

Por la Proposición 3.10 y los comentarios que siguen a la definición de H-espacio trenzado a izquierda, sabemos que (V, s) es un H-espacio trenzado a izquierda si y sólo si $(V, (s^{-1})^\flat)$ es un $H^\dagger$-espacio trenzado a izquierda.

LEMA 3.18. *Sean H una biálgebra trenzada rígida y (V, s) un H-espacio trenzado a izquierda. Cada estructura de $H^\dagger$-módulo a izquierda sobre $(V, (s^{-1})^\flat)$ cumple que*

$$(H \otimes \rho \otimes H) \circ (\mathrm{coev}_H \otimes s) = (H \otimes s) \circ (c \otimes \rho) \circ (H \otimes \mathrm{coev}_H \otimes V),$$

donde $\rho\colon H^\dagger \otimes V \to V$ es la acción de $H^\dagger$ sobre V.

DEMOSTRACIÓN. Por las definiciones de $(s^{-1})^\flat$ y de $c_{H^\dagger}$, el hecho de que $(V, (s^{-1})^\flat)$ es un $H^\dagger$-módulo a izquierda y a propiedades básicas de las funciones de evaluación y coevaluación, valen las igualdades de la Figura 17. De esto se sigue inmediatamente que también vale la igualdad de la Figura 18, lo cual implica que la afirmación hecha en el enunciado es verdadera. □

LEMA 3.19. *Sea H una biálgebra trenzada rígida. Si (V, s) es un H-comódulo a derecha, entonces*

$$(\nu \otimes H^\dagger) \circ (s^{-1})^\flat = (V \otimes c_{H^\dagger H}) \circ ((s^{-1})^\flat \otimes H) \circ (H^\dagger \otimes \nu),$$

donde ν es la coacción de (V, s).

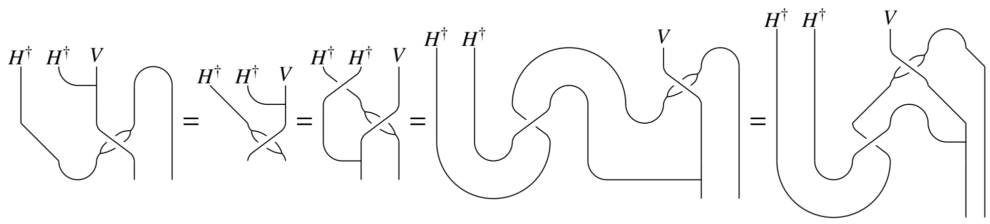


FIGURA 17

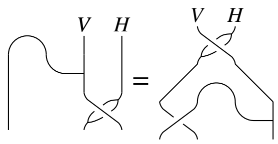


FIGURA 18

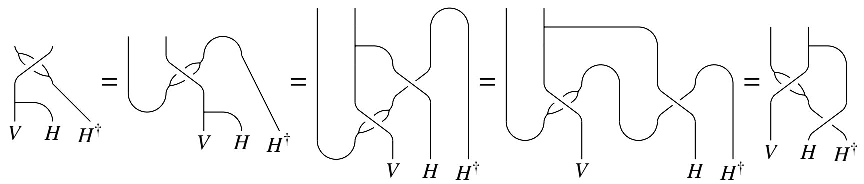


FIGURA 19

DEMOSTRACIÓN. Basta observar que como ν es un morfismo de H-espacios trenzados, las igualdades establecidas en la Figura 19, son verdaderas. Para comodidad del lector señalamos que la primera, que es la más dificil de establecera, se sigue de la definición de $(s^{-1})^\flat$. $\square$

TEOREMA 3.20. *Sean H una biálgebra trenzada rígida. Un H-espacio trenzado a izquierda (V, s) es un H-comódulo a derecha vía $\nu\colon V \to V \otimes H$ si y sólo si $(V, (s^{-1})^\flat)$ es un $H^\dagger$-módulo a izquierda vía ρ_ν.*

DEMOSTRACIÓN. $\Rightarrow$) Dado que $(V, (s^{-1})^\flat)$ es un $H^\dagger$-espacio trenzado a izquierda y ν es una coacción,

$$\rho_\nu(\epsilon \otimes v) = (V \otimes \mathrm{ev}_H) \circ ((s^{-1})^\flat \otimes H) \circ (H^\dagger \otimes \nu)(\epsilon \otimes v) = \epsilon(v_{(1)})v_{(0)} = v,$$

para todo $v \in V$. Por lo tanto, ρ_ν es unitaria. Por el Lema 3.19, el hecho de que (V, ν) es un H-comódulo a derecha, los comentarios que siguen al Teorema 1.19, la compatibilidad de s con c, las igualdades de la Figura 1 y la compatibilidad de s con Δ, valen las igualdades de la la Figura 20, lo que prueba que ρ_ν es asociativa. Resta verificar que

$$(s^{-1})^\flat \circ (H^\dagger \otimes \rho_V) = (\rho_V \otimes H^\dagger) \circ (H^\dagger \otimes (s^{-1})^\flat) \circ (c_{H^\dagger} \otimes V).$$

Pero esto se deduce claramente de la Figura 21, cuyas igualdades valen por la compatibilidad de $(s^{-1})^\flat$ con $c_{H^\dagger}$, el comentario que sigue al Teorema 1.19 y el Lema 3.19.

$\Leftarrow$) Sea $v \in V$. Como s es compatible con ϵ y ρ_ν es unitaria,

$$\begin{aligned}(V \otimes \epsilon) \circ \nu(v) &= (V \otimes \epsilon) \circ s \circ (H \otimes \rho_\nu) \circ (\mathrm{coev}_H \otimes V)(v)\\ &= (\epsilon \otimes V) \circ (H \otimes \rho_\nu) \circ (\mathrm{coev}_H \otimes V)(v)\end{aligned}$$

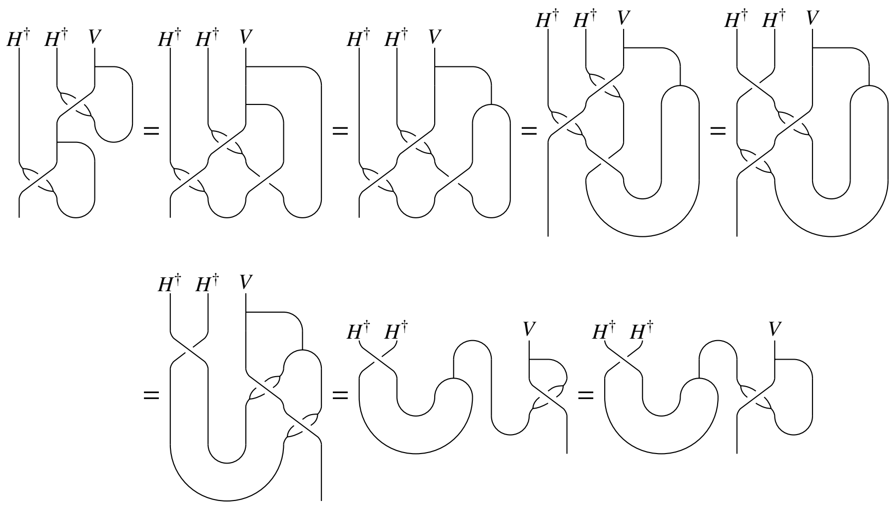


Figura 20

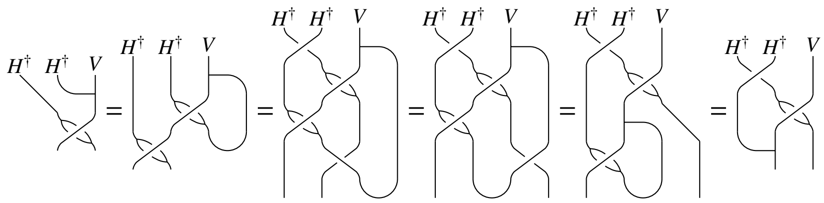


Figura 21

$$
\begin{aligned}
&= \rho_v(\epsilon \otimes v)\\
&= v,
\end{aligned}
$$

donde la primera igualdad se deduce de los comentarios previos al Lema 3.18. Por lo tanto v es counitaria. Por otra parte, por el Lema 3.18, el hecho de que (V, s) es un $H^{\dagger}$-módulo a izquierda, la definición de multiplicación en $H^{\dagger}$, propiedades básicas de las funciones de evaluación y coevaluación, la relación entre ρ_v y v, la compatibilidad de s con Δ y las igualdades de la Figura 1, las igualdades de la Figura 22 son verdaderas, lo que prueba que v es coasociativa. Para terminar la demostración resta verificar que

$$(v \otimes H) \circ s = (V \otimes c) \circ (s \otimes H) \circ (H \otimes v).$$

Pero esto está probado en la Figura 23, cuyas igualdades valen por la relación entre ρ_v y v, la compatibilidad de s con c y al Lema 3.18. □

4. Relaciones entre H-estructuras y $H^{\dagger}$-estructuras

Lema 3.21. *Sean H una biálgebra trenzada rígida y (V, s) un H-espacio trenzado a izquierda. Si $(V, (s^{-1})^{\flat})$ es un $H^{\dagger}$-módulo a izquierda, entonces*

$$s^{-1} \circ (\rho \otimes H) = (H \otimes \rho) \circ (c^{-1}_{HH^{\dagger}} \otimes V) \circ (H^{\dagger} \otimes s^{-1}),$$

donde ρ denota la acción de $H^{\dagger}$sobre V.

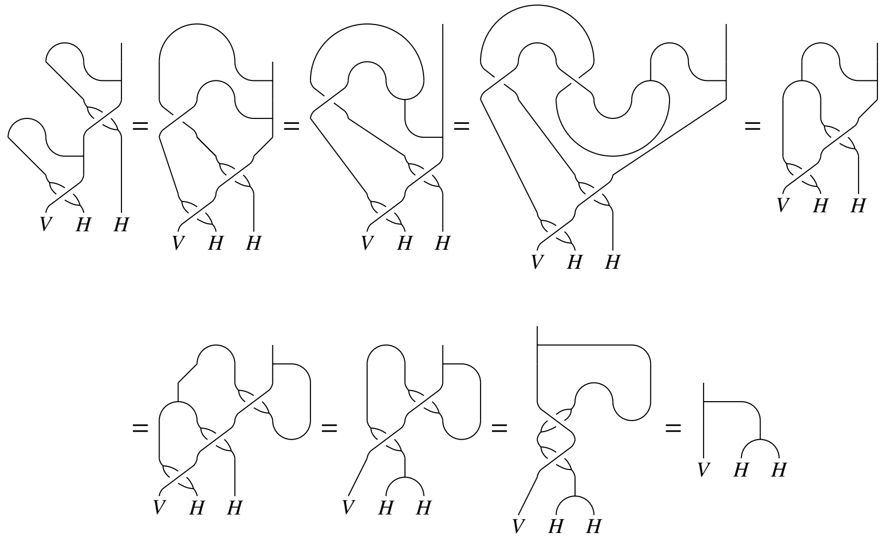


FIGURA 22

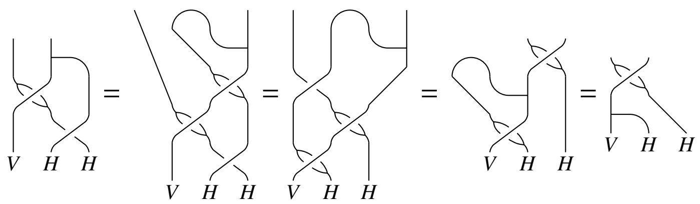


FIGURA 23

DEMOSTRACIÓN. Por el Lema 3.18, los comentarios que siguen al Teorema 1.19 y propiedades básicas de las funciones de evaluación y coevaluación, valen las igualdades de la Figura 24, La

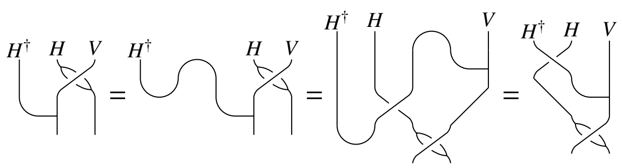


FIGURA 24

afirmación es una consecuencia inmediata de esto. □

TEOREMA 3.22. *Sean H una biálgebra trenzada rígida. Un H-álgebra trenzada a izquierda (A, s) es un H-comódulo álgebra a derecha vía $\nu\colon A \to A \otimes H$ si y sólo si $(A, (s^{-1})^\flat)$ es un $H^\dagger$-módulo álgebra a izquierda vía ρ_ν.*

DEMOSTRACIÓN. ⇒) Por la Proposición 3.13 y el Teorema 3.20 para probar esto es suficiente verificar que

$$\rho_\nu(\varphi \otimes 1) = \varphi(1)1 \quad \text{para todo } \varphi \in H^\dagger$$

y

$$\rho_{\nu} \circ (H^{\dagger} \otimes \mu) = \mu \circ (\rho_{\nu} \otimes \rho_{\nu}) \circ (H^{\dagger} \otimes (s^{-1})^{\flat} \otimes A) \circ (\Delta_{H^{\dagger}} \otimes A \otimes A).$$

Es evidente que la primera igualdad es cierta, y la segunda es una consecuencia inmediata de las igualdades de la Figura 25, que valen por las definiciones de $\Delta_{H^{\dagger}}$ y ρ_{ν}, los comentarios que siguen

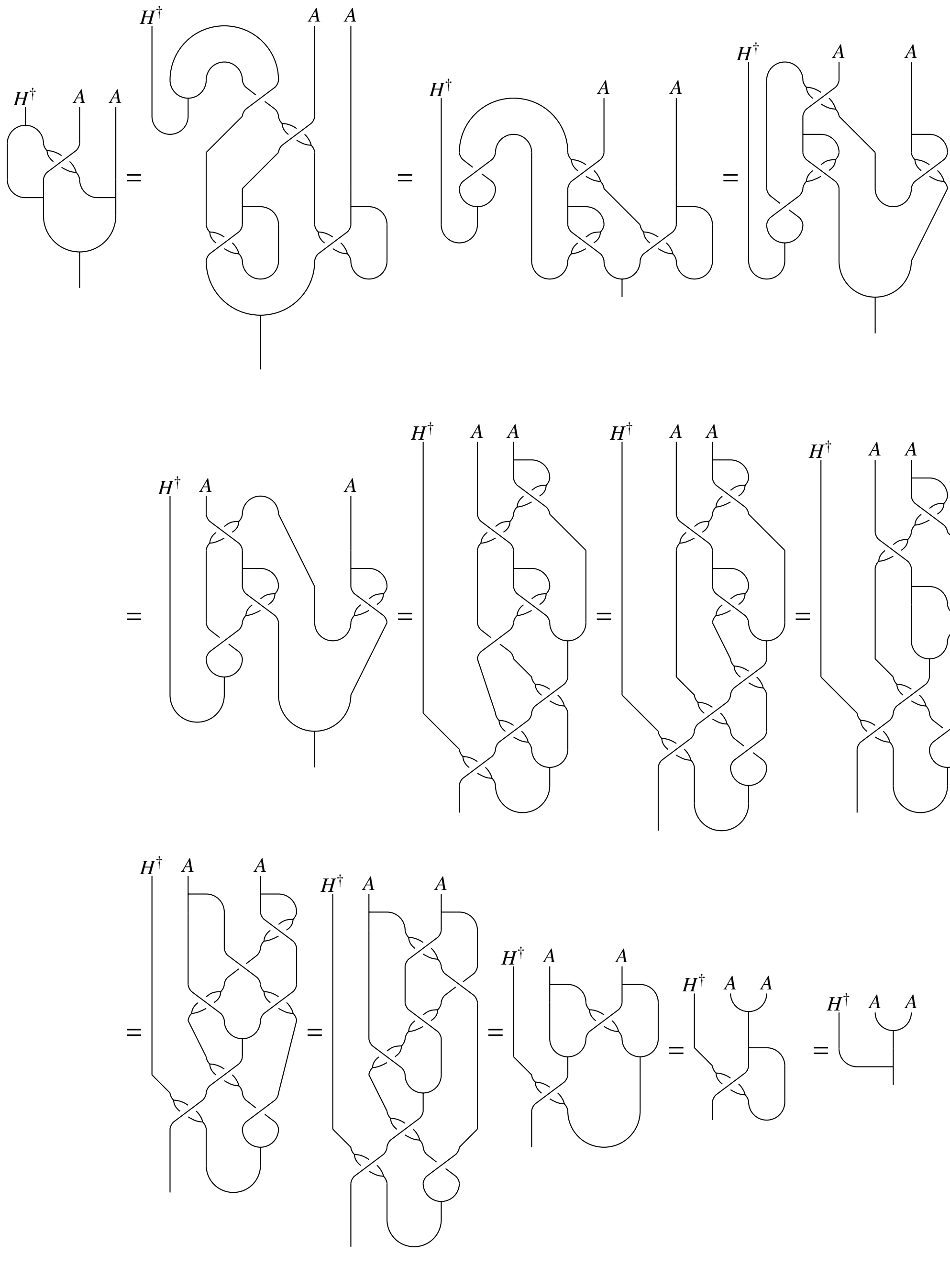


Figura 25

al Teorema 1.19, las igualdades de la Figura 1, la compatibilidad de s con μ_H, μ_A y c, y los hechos de que (V, s) es un H-comódulo a derecha vía ν y

$$\nu \circ \mu = (\mu \otimes \mu) \circ (A \otimes s \otimes A) \circ (\nu \otimes \nu).$$

$\Leftarrow$) Debemos verificar que

$$\nu(1) = 1 \otimes 1 \quad \text{y} \quad \nu \circ \mu = (\mu \otimes \mu) \circ (A \otimes s \otimes H) \circ (\nu \otimes \nu).$$

La primera igualdad es evidente. Por la relación entre ν and ρ_ν, los hechos de que $(A, (s^{-1})^\flat)$ es un $H^\dagger$-módulo álgebra a izquierda y s es una transposición a izquierda, la definición de $\Delta_{H^\dagger}$, los comentarios que siguen al Teorema 1.19, las igualdades de la Figura 1 y al Lema 3.21, las igualdades de la Figura 26 son verdaderas, por lo que

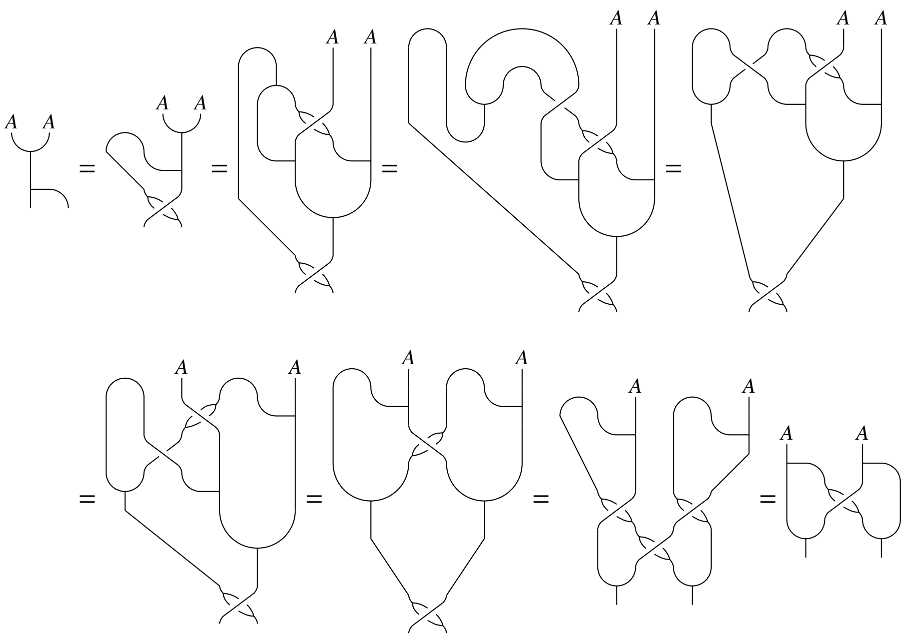


FIGURA 26

$$\nu \circ \mu = (\mu \otimes \mu) \circ (A \otimes s \otimes H) \circ (\nu \otimes \nu),$$

como deseamos. □

5. *H*-invariantes

Sean H una biálgebra trenzada y V un H-módulo a izquierda (derecha) estándar. Recordamos que un elemento $v \in V$ es H-invariante a izquierda (derecha) si $h \cdot v = \epsilon(h)v$ ($v \cdot h = \epsilon(h)v$) para todo $h \in H$, y que el símbolo ${}^HV$ (V^H) denota al conjunto de H-invariantes a izquierda (derecha) de V.

PROPOSICIÓN 3.23. *Sean (A, s) un H-módulo álgebra a izquierda y $\chi\colon H \otimes A \to A \otimes H$ la aplicación $\chi := (\rho \otimes H) \circ (H \otimes s) \circ (\Delta \otimes A)$. Un elemento $a \in A$ es H-invariante si y sólo si $\chi(h \otimes a) = s(h \otimes a)$ para todo $h \in H$.*

DEMOSTRACIÓN. Esto se sigue inmediatamente de la Proposición 2.32. □

Supongamos ahora que H un biálgebra trenzada rígida. Por el Teorema 3.20 sabemos que si (V, s) es un H-comódulo a derecha, entonces $(V, (s^{-1})^\flat)$ es un $H^\dagger$-módulo a izquierda.

PROPOSICIÓN 3.24. $V^{\mathrm{co}\,H} = {}^{H^\dagger}V$.

Demostración. Sea $v \in V^{\mathrm{co}\,H}$. Dado que $(s^{-1})^{\flat}$ es compatible con $\epsilon_{H^{\dagger}}$,

$$\varphi \cdot v = (V \otimes \mathrm{ev}_H) \circ ((s^{-1})^{\flat} \otimes H)(\varphi \otimes v \otimes 1) = (V \otimes \epsilon_{H^{\dagger}})((s^{-1})^{\flat}(\varphi \otimes v)) = \varphi(1)v$$

para todo $\varphi \in H^{\dagger}$. Por lo tanto, $v \in {}^{H^{\dagger}}V$. Recíprocamente, si $v \in {}^{H^{\dagger}}V$, entonces por los comentarios al comienzo de la Sección 3 y la compatibilidad de s con 1,

$$\nu(v) = s\left(\sum_{i=}^{n} h_i \otimes h_i^* \cdot v\right) = s\left(\sum_{i=}^{n} h_i\, h_i^*(1) \otimes v\right) = s(1 \otimes v) = v \otimes 1,$$

donde ν es la coacción de V y $(h_i, h_i^*)_{1 \le i \le n}$ son bases duales de H. □

Teorema 3.25. *Sea H es una biálgebra trenzada rígida. Para todo H-módulo álgebra a izquierda (A, s) es cierto que $s(H \otimes {}^{H}A) = {}^{H}A \otimes H$.*

Demostración. Esto es una consecuencia inmediata de la Proposición 2.33. □

De acuerdo a este teorema, $({}^{H}V, s_|)$, donde $s_|$ es la restricción de s a ${}^{H}A$, es un H-espacio trenzado. Además, debido a la Proposición 2.57, si (A, s) es un H-módulo álgebra a izquierda, entonces

$$s_|\colon H \otimes {}^{H}A \longrightarrow {}^{H}A \otimes H$$

es una transposición.

Recordemos que por la Proposición 2.28, si (V, s) es un H-módulo a izquierda, entonces (V, s^{-1}) tiene una estructura natural de H_c^{op}-módulo a derecha.

6. Productos apareados

Sea H una biálgebra trenzada. Por los Teoremas 2.47 y 2.49, sabemos que si (A, s) es un H-módulo álgebra a izquierda, entonces la aplicación $\chi\colon H \otimes A \longrightarrow A \otimes H$, definida por

$$\chi := (\rho \otimes H) \circ (H \otimes s) \circ (\Delta \otimes A),$$

es compatible con las estructuras de álgebra de A y H. Por lo tanto, como mencionamos en el Ejemplo 1.6, el producto tensorial $A \otimes H$ es un álgebra $A \otimes_{\chi} H$, con multiplicación

$$\mu_{A \otimes_{\chi} H} := (\mu_A \otimes \mu_H) \circ (A \otimes \chi \otimes H),$$

Esta álgebra se llama el *producto apareado de A con H asociado a* (s,ρ), y se denota por $A\#H$. Frecuentemente identificaremos A y H con los subconjuntos $A\otimes 1$ y $1\otimes H$ de $A\#H$, respectivamente. En consecuencia, a veces escribiremos ah en lugar de $a\#h$.

Es fácil ver que A es un $(A\#H, {}^{H}A)$-bimódulo vía la acción regular a derecha y la acción a izquierda

$$(a\#h) \cdot b = a(h \cdot b). \tag{6.19}$$

Además un argumento similar al de la demostración de la Proposición 2.65, prueba que si H es un álgebra de Hopf trenzada con antípoda biyectiva S, entonces A es un $(A^{H}, A\#H)$-bimódulo vía la acción regular a izquierda y la acción a derecha

$$b \cdot (a\#h) = \sum_i S^{-1}(h_i) \cdot (ba)_i, \tag{6.20}$$

donde $\sum_i h_i \otimes (ba)_i = s^{-1}(ba \otimes h)$ y A^{H} es el conjunto de H-invariantes de A bajo la acción a derecha de H sobre A obtenida por la restricción de (6.20).

Sea H un álgebra de Hopf trenzada con antípoda biyectiva S. Observemos que si (A, s) es un H-módulo álgebra a izquierda vía $\rho\colon H \otimes A \to A$, entonces (A, s^{-1}) es un H^{cop}-módulo álgebra a derecha vía $\rho \circ s^{-1} \circ (A \otimes S^{-1})$. Por la Proposición 2.31 sabemos que $A^{H^{\mathrm{cop}}} = {}^{H}A$. Para unificar expresiones, en adelante siempre escribiremos ${}^{H}A$ para denotar este conjunto de H-invariantes.

Proposición 3.26. *Sean H una biálgebra trenzada y (A,s) un H-módulo álgebra a izquierda. Las siguientes aserciones son verdaderas:*

1. *${}^{H}\!A \simeq \mathrm{End}({}_{A\#H}A)^{\mathrm{op}}$, donde consideramos A como un $A\#H$-módulo a izquierda via la acción introducida en en* (6.19).
2. *Si H es un álgebra de Hopf trenzada con antípoda biyectiva, entonces ${}^{H}\!A \simeq \mathrm{End}(A_{A\#H})$, donde A es considerada como un $A\#H$-módulo a derecha via la acción introducida en* (6.20).

Demostración. Probaremos la segunda afirmación. Sea $L_a\colon A \to A$ la multiplicación a izquierda por a. Es claro que la aplicación $a \mapsto L_a$, de ${}^{H}\!A$ en $\mathrm{End}(A_{A\#H})$, está bien definida y es inyectiva. Afirmamos que también es sobreyectiva. Sea $f \in \mathrm{End}(A_{A\#H})$. Como

$$f(a) = f(1\cdot a) = f(1)\cdot a \quad \text{para cada } a \in A,$$

para verificar esta afirmación será suficiente probar que $f(1) \in {}^{H}\!A$. Pero esto es evidente porque

$$f(1)\cdot h = f(1\cdot h) = f(S^{-1}(h)\cdot 1) = \epsilon(h) f(1) \quad \text{para todo } h \in H,$$

y por los comentarios anteriores. □

Proposición 3.27. *Sean H una biálgebra trenzada y (A,s) un H-módulo álgebra a izquierda. Consideremos al álgebra A como un $A\#H$-módulo a izquierda vía la acción* (6.19). *Para cada $A\#H$-módulo M y cada $m_0 \in {}^{H}M$, la función $\Psi\colon A \to M$, definida por $\Psi(a) := a\cdot m_0$, es un morfismo de $A\#H$-módulos a izquierda. Además, si $a \in {}^{H}\!A$, entonces $a\cdot m_0 \in {}^{H}M$.*

Demostración. Sean $a, b \in A$ y $h \in H$. Como m_0 es invariante y s es compatible con ϵ,

$$\begin{aligned}
(b\#h)\cdot\Psi(a) &= (b\#h)\cdot(a\cdot m_0)\\
&= ((b\#h)(a\#1))\cdot m_0\\
&= \sum_i b(h_{(1)}\cdot a_i\#h_{(2)_i})\cdot m_0\\
&= \sum_i b(h_{(1)}\cdot a_i)\epsilon(h_{(2)_i})\cdot m_0\\
&= \sum_i b(h\cdot a)\cdot m_0\\
&= \Psi((b\#h)\cdot a),
\end{aligned}$$

donde

$$\sum_i h_{(1)}\otimes a_i\otimes h_{(2)_i} = (H\otimes s)\circ(\Delta\otimes A)(h\otimes a).$$

La última afirmación puede verificarse fácilmente. □

Proposición 3.28. *Sean H un álgebra de Hopf trenzada con antípoda biyectiva S y (A,s) un H-módulo algebra a izquierda. Consideremos al álgebra A como un $A\#H$-módulo a derecha vía la acción* (6.20). *Para cada $A\#H$-módulo a derecha M y cada $m_0 \in M^H$, la función $\Psi'\colon A \to M$, definida por $\Psi'(a) := m_0\cdot a$, es un morfismo de $A\#H$-módulos. Además, si $a \in {}^{H}\!A$, entonces $m_0\cdot a \in M^H$.*

Demostración. Sean $a, b \in A$ y $h \in H$. Por la demostración del Teorema 2.54, sabemos que

$$ab\#h = \sum_{ij}\big(1\#h_{i(2)_j}\big)\big(S^{-1}(h_{i(1)_j})\cdot(ab)_i\#1\big),$$

donde

$$\sum_{ij} h_{i(2)_j}\otimes S^{-1}(h_{i(1)_j})\cdot(ab)_i = (H\otimes\rho\circ(S^{-1}\otimes A))\circ(c^{-1}\circ\Delta\otimes A)\circ s^{-1}(ab\otimes h).$$

Debido a esto, al hecho de que $m_0 \in M^H$ y a la compatibilidad de c^{-1} con ϵ,

$$\begin{aligned}\Psi'(a)\cdot(b\#h) &= (m_0\cdot a)\cdot(b\#h)\\ &= m_0\cdot(ab\#h)\\ &= m_0\cdot\Big(\sum_{ij}\big(1\#h_{i(2)_j}\big)\big(S^{-1}(h_{i(1)_j})\cdot(ab)_i\#1\big)\Big)\\ &= m_0\cdot\Big(\sum_{ij}\epsilon(h_{i(2)_j})\big(S^{-1}(h_{i(1)_j})\cdot(ab)_i\#1\big)\Big)\\ &= m_0\cdot\big(S^{-1}(h_i)\cdot(ab)_i\#1\big)\\ &= \Psi'(a\cdot(b\#h)),\end{aligned}$$

tal como queríamos. La última aserción puede verificarse fácilmente. □

Proposición 3.29. *Sean H un álgebra de Hopf trenzada rígida y (A,s) un H-módulo álgebra a izquierda. Si t una integral no nula a izquierda o a derecha de H, entonces AtA es un ideal de $A\#H$.*

Demostración. Para integrales a izquierda t este resultado es la Proposición 2.63. Para integrales a derecha t la afirmación puede verificarse de un modo similar. □

Sean H un álgebra de Hopf trenzada rígida, (A,s) un H-módulo álgebra a izquierda y $A\#H$ el producto apareado construido a partir de estos datos. Consideremos a $H\otimes A$ y $A\#H$ como H-módulos a izquierda vía las acciones

$$l\cdot(h\otimes a) := lh\otimes a \quad \text{y} \quad l\cdot(ah) := lah,$$

respectivamente. Sea t una integral no nula a izquierda de H. Afirmamos que ${}^H(A\#H) = tA$. En efecto, en la Proposición 2.54 se comprobó que la aplicación H-lineal

$$\theta\colon H\otimes A \longrightarrow A\#H$$

dada por $\theta(h\otimes a) = ha$ es biyectiva. Por lo tanto, ${}^H(A\#H) = \theta({}^H(H\otimes A)) = \theta(t\otimes A) = tA$.

Proposición 3.30. *Sean H un álgebra de Hopf trenzada rígida, α la función modular de H y (A,s) un H-módulo álgebra a izquierda. La aplicación*

$$(-)^{\alpha}\colon A\#H \longrightarrow A\#H,$$

definida por $(a\#h)^{\alpha} = a\#h^{\alpha}$,donde h^{α} es la función introducida en la Observación 3.6, es un automorfismo de álgebras.

Demostración. Claramente $(-)^{\alpha}$ es biyectiva y $(1\#1)^{\alpha} = 1\#1$. Dados $h\in H$ y $b\in A$, escribamos

$$s(h\otimes b) = \sum_i b_i\otimes h_i.$$

Entonces

$$\begin{aligned}((a\#h)(b\#l))^{\alpha} &= \sum_i (a(h_{(1)}\cdot b_i)\#h_{(2)_i}l)^{\alpha}\\ &= \sum_i a(h_{(1)}\cdot b_i)\#(h_{(2)_i}l)^{\alpha}\\ &= \sum_i a(h_{(1)}\cdot b_i)\#(h_{(2)_i})^{\alpha}l^{\alpha}\\ &= \sum_i a(h_{(1)}\cdot b_i)\#h_{(2)_{i(1)}}\alpha(h_{(2)_{i(2)}})l^{\alpha}\end{aligned}$$

$$= \sum_i a(h_{(1)} \cdot b_i)\#h_{(2)_i}\alpha(h_{(3)})l^\alpha$$
$$= (a\#h)^\alpha (b\#l)^\alpha,$$

donde las tercera y cuarta igualdades se siguen de la Observación 3.6 y la última de la compatibilidad de s con la comultiplicación y la Proposicion 2.22. □

7. Extensiones de Galois

Sean H una biálgebra trenzada y (A, s) un H-comódulo álgebra a derecha. Llamemos ν a la coacción de A. Recordemos de la Sección 7 del Capítulo 1 que el par $(A^{\mathrm{co}\,H} \hookrightarrow A, s)$ es llamado una H-extensión a derecha de $A^{\mathrm{co}\,H}$, y que una tal H-extensión se dice H-Galois si la función

$$\beta_A : A \otimes_{A^{\mathrm{co}\,H}} A \longrightarrow A \otimes H,$$

definida por $\beta_A(a \otimes b) = (a \otimes 1)\nu(b)$, es biyectiva. Además, por el Teorema 3.22 y la Proposición 3.24, sabemos que si H es rígida, entonces $(A, (s^{-1})^\flat)$ es un $H^\dagger$-módulo álgebra a izquierda y ${}^{H^\dagger}\!A = A^{\mathrm{co}\,H}$. La Observación 3.31 y el Teorema 3.32 generalizan algunos resultados de [**20**]. En la demostración de dicho teorema seguimos de cerca un argumento de Schneider [**28**].

Observación 3.31. *Sean H un álgebra de Hopf trenzada con antípoda biyectiva S y (A, s) un H-comódulo álgebra a derecha. Sean*

$$\beta'_A : A \otimes_{A^{\mathrm{co}\,H}} A \longrightarrow A \otimes H \qquad y \qquad \Phi : A \otimes H \longrightarrow A \otimes H$$

las aplicaciones definidas por

$$\beta'_A := (\mu_A \otimes H) \circ (A \otimes s) \circ (\nu_A \otimes A) \qquad y \qquad \Phi := (A \otimes \mu_H) \circ (\nu_A \otimes S).$$

Un cálculo directo prueba que los siguientes hechos valen:

1. *Φ es biyectiva, con inversa $\Phi^{-1} = (A \otimes \mu_H) \circ (A \otimes c^{-1}) \circ (\nu_A \otimes S^{-1})$.*
2. *$\Phi \circ \beta_A = \beta'_A$. Por lo tanto, β_A es inyectiva (sobreyectiva) si y sólo si β'_A lo es.*

Teorema 3.32. *Sean H un álgebra de Hopf trenzada rígida y (A, s) un H-comódulo álgebra a derecha tales que la aplicación de Galois β_A es sobreyectiva. Sea $T \in H^\dagger$ una integral a izquierda no nula. Las siguientes afirmaciones son verdaderas:*

1. *Existen elementos $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in A$ tales que $(x \mapsto T \cdot (b_i x), a_i)$ es una base proyectiva de A como ${}^{H^\dagger}\!A$-módulo a derecha .*
2. *β_A es inyectiva, y por ende biyectiva.*

Demostración. (1) Por el Corolario 3.4, sabemos que existe una integral a derecha $u \in H$ tal que $T(uh) = \epsilon(h)$, para todo $h \in H$. Como

$$\beta_A : A \otimes_{{}^{H^\dagger}\!A} A \longrightarrow A \otimes H$$

es sobreyectiva y la función

$$g_{(s^{-1})^\flat} : A \longrightarrow A$$

es un automorfismo de álgebras, existe $\sum_i a_i \otimes b_i \in A \otimes_{{}^{H^\dagger}\!A} A$ tal que

$$\sum_i a_i g_{(s^{-1})^\flat}(b_{i(0)}) \otimes b_{i(1)} = 1 \otimes u. \tag{7.21}$$

Por otro lado, usando el Teorema 3.22, la definición de ρ_ν, el Lema 3.19 y la compatibilidad de $\Delta_{H^\dagger}$ con $(s^{-1})^\flat$, se comprueba fácilmente que valen las igualdades de la Figura 27. En el resto de

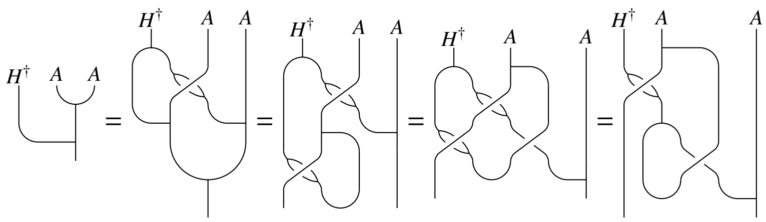


FIGURA 27

la prueba escribimos

$$T_{(1)} \otimes T_{(2)} := \Delta_{H^\dagger}(T) \quad \text{y} \quad \sum_j b_{i(0)} \otimes T_{(1)} \otimes b_{i(1)_j} \otimes T_{(2)_j} := b_{i(0)} \otimes T_{(1)} \otimes c_{H^\dagger H}(T_{(2)} \otimes b_{i(1)}).$$

Denotemos con $\phi_i \colon A \to {}^{H^\dagger}\!A$ a la aplicación ${}^{H^\dagger}\!A$-lineal a derecha definida por $\phi_i(a) = T \cdot (b_i a)$. Usando las igualdades de la Figura 27 y que

$$(s^{-1})^\flat(T \otimes b) = g_{(s^{-1})^\flat}(b) \otimes T,$$

obtenemos que

$$\sum_i a_i\phi_i(a) = \sum_i a_i T \cdot (b_i a) = \sum_i a_i g_{(s^{-1})^\flat}(b_{i(0)})\langle T_{(1)}, b_{i(1)_j}\rangle(T_{(2)_j} \cdot a). \tag{7.22}$$

Por la Observación 1.26, es cierto que

$$c_{H^\dagger H}(\varphi \otimes u) = u \otimes \varphi \circ (f_H^l)^{-1} \qquad \text{para todo } \varphi \in H^\dagger.$$

Usando este hecho y las igualdades (7.21) y (7.22), vemos que

$$\sum_i a_i\phi_i(a) = \langle T_{(1)}, u\rangle(T_{(2)} \circ (f_H^l)^{-1}) \cdot a. \tag{7.23}$$

Dado que por la definición de $\Delta_{H^\dagger}$ y la Observación 1.26,

$$\langle T_{(1)}, u\rangle\langle T_{(2)}, (f_H^l)^{-1}(h)\rangle = \langle T, \mu \circ c((f_H^l)^{-1}(h) \otimes u)\rangle = \langle T, uh\rangle = \epsilon(h)$$

para todo $h \in H$, concluímos que

$$\sum_i a_i\phi_i(a) = \epsilon \cdot a = a,$$

como queríamos.

(2) Por la Observación 3.31 es suficiente verificar que β'_A es inyectiva. Para simplificar notaciones escribamos $B := A^{\operatorname{co} H}$. Tomemos

$$\sum_j u_j \otimes_B v_j \in \ker(\beta'_A).$$

Entonces

$$\sum_j u_{j(0)} v_{j_i} \otimes u_{j(1)_i} = 0,$$

donde

$$\sum_j u_{j(0)} \otimes v_{j_i} \otimes u_{j(1)_i} = \sum_j u_{j(0)} \otimes s(u_{j(1)} \otimes v_j).$$

Sean

$$\chi := (\rho_\nu \otimes H^\dagger) \circ (H^\dagger \otimes (s^{-1})^\flat) \circ (\Delta_{H^\dagger} \otimes A) \qquad \text{y} \qquad x := \sum_{ij} a_i \otimes T \otimes b_i \otimes u_j \otimes_B v_j.$$

Un cálculo directo muestra que

$$
\begin{aligned}
\sum u_j \otimes_B v_j &= (\mu_A \otimes A) \circ (A \otimes \rho_v \otimes_B A) \circ (A \otimes H^\dagger \otimes \mu_A \otimes_B A)(x)\\
&= (A \otimes_B \mu_A) \circ (A \otimes \rho_v \otimes_B A) \circ (A \otimes H^\dagger \otimes \mu_A \otimes_B A)(x)\\
&= (A \otimes_B \mu_A) \circ (A \otimes A \otimes \mu_A) \circ (A \otimes A \otimes \rho_v \otimes A) \circ (A \otimes \chi \otimes A \otimes A)(x)\\
&= (A \otimes_B \mu_A \otimes \mathrm{ev}_H) \circ (A \otimes A \otimes (s^{-1})^\flat \otimes H) \circ (A \otimes \chi \otimes \beta'_A)(x)\\
&= 0,
\end{aligned}
$$

donde la primera igualdad se sigue del ítem (1), la segunda de la Proposición 3.24, la tercera del hecho de que A es un $H^\dagger$-módulo álgebra a izquierda y la última de la Figura 28. Por lo tanto, β'_A

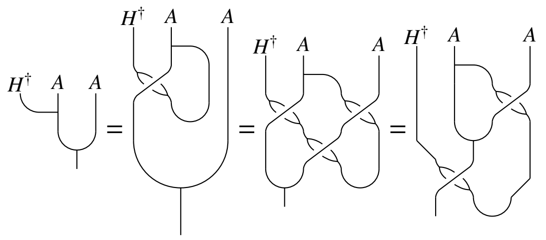


Figura 28

es inyectiva. □

Lema 3.33. *Sea H una biálgebra trenzada rígida y $s\colon H \otimes A \to A \otimes H$ una transposición a izquierda. Entonces,*

$$
\begin{aligned}
(A \otimes \mathrm{ev}_H \otimes H^\dagger) \circ ((s^{-1})^\flat \otimes c_{H^\dagger H}) \circ (H^\dagger \otimes (s^{-1})^\flat \otimes H) \circ ((H^\dagger)^{\otimes 2} \otimes s)&\\
= (\mathrm{ev}_H \otimes (s^{-1})^\flat) \circ (H^\dagger \otimes c_{H^\dagger H} \otimes A).&
\end{aligned}
$$

Demostración. Por los comentarios que siguen al al Teorema 1.19, las igualdades de la Figura 1 y la compatibilidad de $(s^{-1})^\flat$ con $c_{H^\dagger}$, las igualdades de la Figura 29 valen. El lema es una

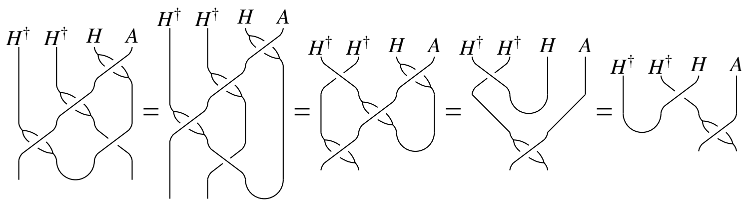


Figura 29

consecuencia inmediata de esto. □

Los Teoremas 3.34 y 3.35 generalizan los Teoremas 1.2 y 1.2' de [**8**] y sus demostraciones son similares a las dadas en ese trabajo.

Teorema 3.34. *Sean H un álgebra de Hopf trenzada rígida y (A, s) un H-comódulo álgebra a derecha. Consideremos a A como un $(A\#H^\dagger, {}^{H^\dagger}\!A)$-bimódulo vía las acciones definidas al comienzo de la Sección 6. Sea $g_s\colon A \to A$ el automorfismo de álgebras introducido en el Teorema 2.20. Denotemos con ${}^{g}A$ al álgebra A, provista con la estructura de A-módulo a izquierda dada por $a \cdot b = g_s(a)b$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. $({}^{H^\dagger}\!A \hookrightarrow A, s)$ *es H-Galois.*
2. (a) *La función*

$$\pi\colon A\#H^\dagger \longrightarrow \operatorname{End}(A_{{}^{H^\dagger}\!A}),$$

definida por $\pi(a\#\varphi)(b) := (a\#\varphi)\cdot b$, *es un isomorfismo de álgebras.*

   (b) *A es un* ${}^{H^\dagger}\!A$*-módulo a derecha proyectivo finitamente generado.*
3. *A es un* $A\#H^\dagger$*-generador a izquierda.*
4. *Si* $0 \neq T \in \int^l_{H^\dagger}$, *entonces la función*

$$[-,-]\colon A \otimes_{{}^{H^\dagger}\!A} {}^{g}\!A \longrightarrow A\#H^\dagger,$$

dada por $[a,b] = aTb$, *es sobreyectiva.*
5. *Para todo* $A\#H^\dagger$*-módulo a izquierda M, consideremos a* $A \otimes_{{}^{H^\dagger}\!A} {}^{H^\dagger}\!M$ *provisto de la estructura de* $A\#H^\dagger$*-módulo dada por*

$$(a\#\varphi)\cdot(b\otimes m) = \pi(a\#\varphi)(b)\otimes m.$$

La aplicación

$$F_M\colon A \otimes_{{}^{H^\dagger}\!A} {}^{H^\dagger}\!M \longrightarrow M,$$

definida por $F_M(a\otimes m) = a\cdot m$, *es un isomorfismo de* $A\#H^\dagger$*-módulos a izquierda.*

Demostración. (2) ⇔ (3) Como en el caso clásico, esto es consecuencia de un teorema de Morita [**15**, 4.1.3].

(1) ⇔ (4) Sea $\vartheta\colon H \to H^\dagger$ la aplicación definida por

$$\vartheta(h) = (\mathrm{ev}_H \otimes H^\dagger)\circ(H^\dagger\otimes c_{H^\dagger H})\circ(\Delta_{H^\dagger}(T)\otimes h).$$

Un cálculo directo muestra que $\vartheta(h)(l) = T(hl)$ para todo $h,l\in H$. Por lo tanto, por [**13**, Theorem 3.b] sabemos que ϑ es una función biyectiva. Dado que $g_{(s^{-1})^\flat}$ también lo es, para probar que (1) ⇔ (4) es suficiente comprobar que

$$(g_{(s^{-1})^\flat}\otimes\vartheta)\circ\beta_A = [-,-]\circ(g_{(s^{-1})^\flat}\otimes_{{}^{H^\dagger}\!A} A).$$

Esto se prueba en la Figura 30, donde escribimos $g = g_{(s^{-1})^\flat}$ y $g' = g_s$. Las igualdades de esta figura valen la definición de ϑ, los comentarios previos al Lema 3.18, la definición de g, el hecho de que g es un morfismo de álgebras, la compatibilidad de $(s^{-1})^\flat$ con $\Delta_{H^\dagger}$, el Corolario 3.16, el Lema 3.33, el hecho de que $(A,(s^{-1})^\flat)$ es un $H^\dagger$-módulo a izquierda y propiedades básicas de las funciones de evaluación y coevaluación.

(4) ⇒ (3) Por hipótesis existen $x_1,\dots,x_s,y_1,\dots,y_s\in A$ tales que $1\#\varepsilon = \sum_i x_iTy_i$. Por este hecho, la Proposición 3.27 y los comentarios que siguen a la Proposición 3.29, la función

$$f\colon A^{(s)} \longrightarrow A\#H^\dagger,$$

definida por $f(a_1,\dots,a_s) = \sum_i a_iTy_i$, es $A\#H^\dagger$-lineal y sobreyectiva. Por consiguiente, A es un $A\#H^\dagger$-generador a izquierda.

(5) ⇒ (4) Por los comentarios que siguen a la Proposición 3.29, ${}^{H^\dagger}\!(A\#H^\dagger) = TA$. La afirmación es una consecuencia inmediata de este hecho.

(2) ⇒ (4) Por la Proposición 3.29 es suficiente comprobar que $1\#\epsilon\in ATA$. Por la condición 2b), existen

$$x_1,\dots,x_s\in A \qquad \text{y} \qquad \varphi_1,\dots,\varphi_s\in\operatorname{Hom}(A_{{}^{H^\dagger}\!A}, {}^{H^\dagger}\!A_{{}^{H^\dagger}\!A})$$

tales que $a = \sum_i x_i\varphi_i(a)$ para todo $a\in A$. Dicho de otro modo, $\sum_i x_i\varphi_i = \mathrm{id}_{\operatorname{End}(A_{{}^{H^\dagger}\!A})}$. Pero

$$\operatorname{Hom}(A_{{}^{H^\dagger}\!A}, {}^{H^\dagger}\!A_{{}^{H^\dagger}\!A}) \hookrightarrow \operatorname{End}(A_{{}^{H^\dagger}\!A}) \simeq A\#H^\dagger$$

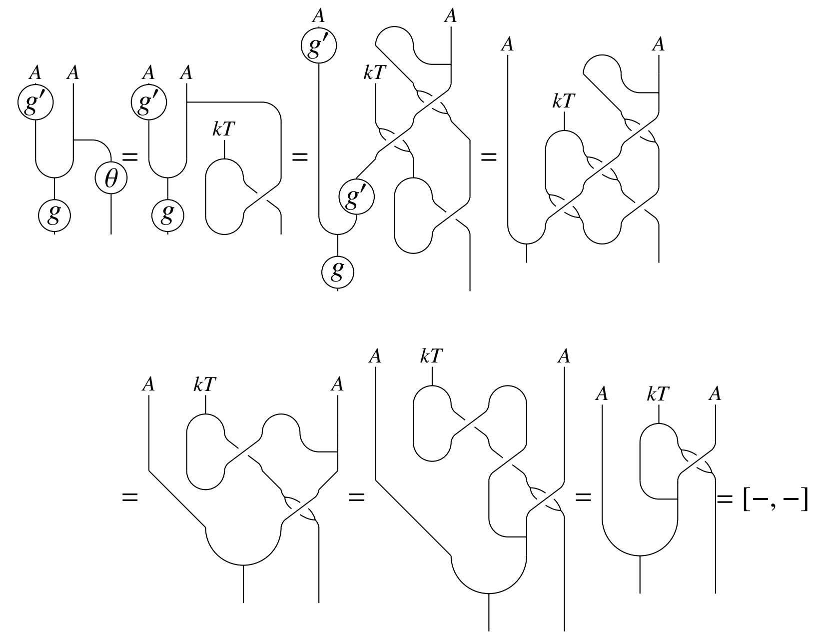


Figura 30

por la condición 2a). Por lo tanto, tomando $d_i \in A\#H^\dagger$ tal que

$$\varphi_i = \pi(d_i) \quad \text{para cada } i = 1, \dots, s,$$

obtenemos que

$$\sum_i x_i d_i = 1\#1_{H^\dagger} = 1\#\epsilon \in A\#H^\dagger.$$

Afirmamos que $d_i \in {}^{H^\dagger}(A\#H^\dagger)$. En efecto, esto es cierto porque, si $a \in A$ y $h^* \in H^\dagger$, entonces

$$\pi(h^* d_i)(a) = h^* \cdot \varphi_i(a) = \epsilon(h^*)\varphi_i(a) = \pi(\epsilon(h^*)d_i)(a),$$

puesto que $\varphi_i(a) \in {}^{H^\dagger}A$. Dado que π es un isomorfismo, $h^* d_i = \epsilon(h^*)d_i$ para todo i, lo cual prueba la afirmación. Por el comentario que sigue a la Proposición 3.29, tenemos que ${}^{H^\dagger}(A\#H^\dagger) = TA$. Por ende, para todo i existe $y_i \in A$ con $d_i = Ty_i$. Así que

$$1\#\epsilon = \sum_i x_i d_i = \sum_i x_i T y_i \in ATA.$$

(4) ⇒ (5) Como antes, escribamos

$$1_{A\#H^\dagger} = \sum_i x_i T y_i$$

y tomemos $d_i = Ty_i$. Usando que $T \in \int^l_{H^\dagger}$, es fácil verificar que $d_i M \subseteq {}^{H^\dagger}M$ para todo $A\#H^\dagger$-módulo a izquierda M. Definimos

$$\psi \colon M \longrightarrow A \otimes_{{}^{H^\dagger}A} {}^{H^\dagger}M$$

por $\psi(m) := \sum_i x_i \otimes d_i \cdot m$. Afirmamos que ψ y F_M son inversas. En efecto, esto es cierto porque

$$F_M \circ \psi(m) = F_M(\sum_i x_i \otimes d_i \cdot m) = (\sum_i x_i d_i) \cdot m = m,$$

dado que $\sum_i x_i T y_i = 1_{A\#H^\dagger}$. Por otra parte, usando que si $\varphi_i = \pi(d_i)$, entonces $\varphi_i(a) \in {}^{H^\dagger}\!A$, vemos que

$$\begin{aligned}\psi \circ F_M(a \otimes m_0) &= \psi(a \cdot m_0)\\ &= \sum_i x_i \otimes d_i \cdot am_0\\ &= \sum_i x_i \otimes \varphi_i(a)m_0\\ &= \sum_i x_i\varphi_i(a) \otimes m_0\\ &= a \otimes m_0.\end{aligned}$$

Sólo resta verificar que F_M es un morfismo de $A\#H^\dagger$-módulos a izquierda, pero de acuerdo a la Proposición 3.27 efectivamente lo es. □

Teorema 3.35. *Sean H un álgebra de Hopf trenzada rígida con antípoda biyectiva y (A, s) un H-comódulo álgebra a derecha. Consideremos A como un $({}^{H^\dagger}\!A, A\#H^\dagger)$-bimódulo vía las acciones definidas al comienzo de la Sección 6. Sea ${}^{g}A$ como en el Teorema 3.34. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *$({}^{H^\dagger}\!A \hookrightarrow A, s)$ es H-Galois.*
2. (a) *La función*
$$\pi' : A\#H^\dagger \longrightarrow \operatorname{End}({}_{{}^{H^\dagger}\!A}A)^{\mathrm{op}},$$
definida por $\pi'(a\#\varphi)(b) := b \cdot (a\#\varphi)$, es un isomorfismo de álgebras.
   (b) *A es un ${}^{H^\dagger}\!A$-módulo a izquierda proyectivo finitamente generado.*
3. *A es un $A\#H^\dagger$-generador a derecha.*
4. *Si $0 \neq U \in \int^r_{H^\dagger}$, entonces la aplicación*
$$[-,-]' : A \otimes_{{}^{H^\dagger}\!A} {}^{g}A \longrightarrow A\#H^\dagger,$$
dada por $[a, b]' = aUb$, es sobreyectiva.
5. *Para todo $A\#H^\dagger$-módulo a derecha M, si proveemos a $M^{H^\dagger} \otimes_{{}^{H^\dagger}\!A} A$ de la estructura de $A\#H^\dagger$-módulo dada por*
$$(m \otimes b) \cdot (a\#\varphi) = m \otimes \pi'(a\#\varphi)(b),$$
entonces la aplicación $G_M : M^{H^\dagger} \otimes_{{}^{H^\dagger}\!A} A \to M$, definida por $G_M(m \otimes a) = m \cdot a$, es un isomorfismo de $A\#H^\dagger$-módulos a derecha.

Demostración. (2) ⇔ (3) Procedase como en la prueba de la equivalencia de los items (2) y (3) del Teorema 3.34.

(1) ⇔ (4) Repitase el argumento dado en la prueba del Teorema 3.34, reemplazando T por U.

(4) ⇒ (3) Por hipótesis existen $x_1, \dots, x_s, y_1, \dots, y_s \in A$ tales que $1\#\epsilon = \sum_i x_i U y_i$. Debido a esto, al hecho de que $(A\#H^\dagger)^{H^\dagger} = AU$ y la Proposición 3.28, la aplicación
$$f : A^{(s)} \longrightarrow A\#H^\dagger,$$
definida por
$$f(a_1, \dots, a_s) := \sum_i a_i U y_i$$
es $A\#H^\dagger$-lineal y sobreyectiva. Por lo tanto A es un $A\#H^\dagger$-generador a derecha.

(5) ⇒ (4) Esto se sigue inmediatamente del hecho de que $(A\#H^\dagger)^{H^\dagger} = AU$.

(2) $\Rightarrow$ (4) Por la Proposición 3.29 es suficiente comprobar que $1\#\epsilon \in AUA$. Procediendo como en el teorema anterior, obtenemos elementos

$$\varphi_i \in \mathrm{Hom}({}_{H^\dagger A}A, {}_{H^\dagger A}{}^{H^\dagger}A) \qquad \text{y} \qquad x_i \in A \qquad (1 \le i \le s)$$

tales que $\sum_i \varphi_i d_i = \mathrm{id}_{\mathrm{End}({}_{H^\dagger A}A)}$. Razonando como antes se comprueba que existen

$$d_i \in (A\#H^\dagger)^{H^\dagger} \quad \text{y} \qquad y_i \in A \qquad (1 \le i \le s)$$

tales que $\varphi_i = \pi'(d_i)$ y $d_i = y_i U$. Por lo tanto

$$1\#\epsilon = \sum_i y_i U x_i,$$

por lo que vale esta implicación.

(4) $\Rightarrow$ (5) Argumentando como en el teorema anterior se comprueba que G_M es inversible y que su inversa es una función

$$\psi' \colon M \longrightarrow M^{H^\dagger} \otimes_{{}^{H^\dagger}A} A,$$

dada por una fórmula de la forma $\psi'(m) := \sum_i (m \cdot d_i) \otimes x_i$, donde los $d_i \in A\#H^\dagger$ son elementos que satisfacen $M \cdot d_i \subseteq M^{H^\dagger}$ para todo $A\#H^\dagger$-módulo a derecha M. Además, G_M es un morfismo de $A\#H^\dagger$- módulos a derecha por la Proposición 3.28. □

Corolario 3.36. *Sean H un álgebra de Hopf trenzada rígida, (A, s) un H-comódulo algebra a derecha y $T \in \int^l_{H^\dagger} \setminus\{0\}$. Sea ${}^gA$ como en el Teorema 3.34. Si $({}^{H^\dagger}\!A \hookrightarrow A, s)$ es H-Galois, entonces la función $\overline{\pi} \colon {}^gA \to \mathrm{Hom}(A_{H^\dagger A}, {}^{H^\dagger}\!A_{H^\dagger A})$, definida por $\overline{\pi}(a)(b) = T \cdot (ab)$, es un isomorfismo de $({}^{H^\dagger}\!A, A)$-bimódulos.*

Demostración. Es evidente que $\overline{\pi}$ es A-lineal a derecha. Para cada $c \in {}^{H^\dagger}\!A$,

$$\overline{\pi}(c \cdot a)(b) = \overline{\pi}(g_s(c)a)(b) = T \cdot \big(g_s(c)ab\big) = cT \cdot (ab),$$

donde la última igualdad se sigue del Corolario 3.16 y del hecho de que, por la Proposición 2.59, sabemos que $g_s(c) \in {}^{H^\dagger}\!A$. Esto muestra que $\overline{\pi}$ es ${}^{H^\dagger}\!A$-lineal a izquierda. Probemos que es biyectiva. Consideremos a $A\#H^\dagger$ y $\mathrm{End}(A_{H^\dagger A})$ como $H^\dagger$-módulos a izquierda vía

$$\varphi \cdot (a\psi) := \varphi a \psi \qquad \text{y} \qquad (\varphi \cdot f)(a) := \varphi \cdot f(a).$$

Como la aplicación $\pi \colon A\#H^\dagger \to \mathrm{End}(A_{H^\dagger A})$, introducida en el Teorema 3.34, es $H^\dagger$-lineal, y es evidente que $\mathrm{Hom}(A_{H^\dagger A}, {}^{H^\dagger}\!A_{H^\dagger A})$ es el conjunto de $H^\dagger$-invariantes a izquierda de $\mathrm{End}(A_{H^\dagger A})$, por el comentario que sigue a la Proposición 3.29 la función π se restringe a una función biyectiva de TA en $\mathrm{Hom}(A_{H^\dagger A}, {}^{H^\dagger}\!A_{H^\dagger A})$. La afirmación se sigue inmediatamente de este hecho. □

Corolario 3.37. *Sean H un álgebra de Hopf trenzada rígida, (A, s) un H-comódulo álgebra a derecha y $U \in \int^r_{H^\dagger} \setminus\{0\}$. Consideremos a A como un $A\#H^\dagger$-módulo como en el Teorema 3.35, y denotemos con A^g al álgebra A provista con la estructura de A-módulo a izquierda dada por $b \cdot a = bg_{(s^{-1})^\flat}(a)$, donde $g_{(s^{-1})^\flat} \colon A \to A$ es el automorfismo de álgebras introducido en el Teorema 2.20. Si $({}^{H^\dagger}\!A \hookrightarrow A, s)$ es H-Galois, entonces la función $\overline{\pi'} \colon A^g \to \mathrm{Hom}({}_{H^\dagger A}A, {}_{H^\dagger A}{}^{H^\dagger}\!A)$, definida por $\overline{\pi'}(a)(b) = (ba) \cdot U$, es un isomorfismo de $(A, {}^{H^\dagger}\!A)$-bimódulos.*

Demostración. Es evidente que $\overline{\pi'}$ es A-lineal a izquierda y dejamos al lector la tarea de verificar que es ${}^{H^\dagger}\!A$-lineal a derecha. Probemos que es biyectiva. Consideremos a $A\#H^\dagger$ y $\mathrm{End}({}_{H^\dagger A}A)^{\mathrm{op}}$ como $H^\dagger$-módulos a derecha vía

$$(a\psi) \cdot \varphi := a\psi\varphi \qquad \text{y} \qquad (f \cdot \varphi)(a) - = f(a) \cdot \varphi.$$

La función $\pi'\colon A\#H^{\dagger} \to \mathrm{End}({}_{{}^{H^{\dagger}}\!A}A)^{\mathrm{op}}$, introducida en el Teorema 3.35, es $H^{\dagger}$-lineal, y es evidente que AU y $\mathrm{Hom}({}_{{}^{H^{\dagger}}\!A}A, {}_{{}^{H^{\dagger}}\!A}{}^{H^{\dagger}}\!A)$ son los conjuntos de $H^{\dagger}$-invariantes a derecha de $A\#H^{\dagger}$ y $\mathrm{End}({}_{{}^{H^{\dagger}}\!A}A)^{\mathrm{op}}$, respectivamente. Por lo tanto π' se restringe a una función biyectiva de AU en $\mathrm{Hom}({}_{{}^{H^{\dagger}}\!A}A, {}_{{}^{H^{\dagger}}\!A}{}^{H^{\dagger}}\!A)$. Esto implica que también $\overline{\pi'}$ es biyectiva. □

8. Existencia de elementos de traza 1

Sean H un álgebra de Hopf trenzada rígida y (A, s) un H-comódulo álgebra a derecha. Por el Corolario 3.16 sabemos que $g^{-1}_{(s^{-1})^{\flat}} = g_s$. En la Sección 8 del Capítulo 1 se probó que A es un ${}^{H^{\dagger}}\!A$-módulo a izquierda vía

$$a \triangleright b := g_s(a)b$$

y un $A\#H^{\dagger}$-módulo a derecha vía

$$b \leftarrow (a\#\varphi) = \sum_i S^{-1}((\varphi^{\alpha})_i) \cdot (ba)_i,$$

donde $\alpha\colon H^{\dagger} \to k$ es la función modular y

$$\sum_i (\varphi^{\alpha})_i \otimes (ba)_i = ((s^{-1})^{\flat})^{-1}(ba \otimes \varphi^{\alpha}).$$

Además, A es un $({}^{H^{\dagger}}\!A, A\#H^{\dagger})$-bimódulo. Consideremos los bimódulos

$$M := {}_{{}^{H^{\dagger}}\!A}A_{A\#H^{\dagger}} \qquad \text{y} \qquad N := {}_{A\#H^{\dagger}}A_{{}^{H^{\dagger}}\!A},$$

donde las acciones sobre N son las introducidas en la Sección 6. Por el Teorema 2.69 sabemos que las aplicaciones

$$[-,-]\colon N \otimes_{{}^{H^{\dagger}}\!A} M \to A\#H^{\dagger}, \qquad \text{dada por } [a, b] = aTb$$

y

$$(-,-)\colon M \otimes_{A\#H^{\dagger}} N \to {}^{H^{\dagger}}\!A, \qquad \text{dada por } (a, b) = T \cdot (ab),$$

en las cuales $T \neq 0$ es una integral a izquierda de $H^{\dagger}$, definen un contexto Morita para ${}^{H^{\dagger}}\!A$ y $A\#H^{\dagger}$. El propósito de esta Sección es estudiar las implicaciones de la sobreyectividad de la función $(-,-)$. La Proposición 3.38 generaliza el item (1) de la Proposición 2.5 de [**8**] y las Proposiciones 3.39, 3.41 y 3.46 generalizan las Proposiciones 1.4, 1.5 y 1.7 de [**7**], respectivamente. No probaremos la segunda, porque las demostración dada en [**7**] funciona en nuestro contexto. Recordemos que un elemento c de A es un un elemento de traza 1 si $T \cdot c = 1$. Es claro que la existencia de elementos de traza 1 es equivalente a la sobreyectividad de $(-,-)$.

Proposición 3.38. *La función $(-,-)$ es sobreyectiva si y sólo si existe $x \in A\#H^{\dagger}$ tal que $TxT = T$.*

Demostración. Asumamos que existe

$$x = \sum_i u_i h_i^* \in A\#H^{\dagger}$$

tal que $TxT = T$ y tomemos $c := \sum_i \epsilon(h_i^*)u_i$. Por la Proposición 2.63, sabemos que

$$TcT = (T \cdot c)T.$$

Por lo tanto

$$T = TxT = T(\sum_i u_i\#h_i^*T) = T(\sum_i u_i\#\epsilon(h_i^*)T) = TcT = (T \cdot c)T.$$

En consecuencia $T \cdot c = 1$, y $(-,-)$ es sobreyectiva. Recíprocamente, si $T \cdot c = 1$, entonces, nuevamente por la Proposición 2.63,

$$TcT = (T \cdot c)T = T,$$

por lo que que podemos tomar $x = c$. □

Proposición 3.39. *Sea V un ${}^{H^\dagger}\!A$-módulo a izquierda. Consideremos $A \otimes_{{}^{H^\dagger}\!A} V$ como un $H^\dagger$-módulo a izquierda vía $\varphi \cdot (a \otimes v) = \varphi \cdot a \otimes v$. Si $(-,-)$ es sobreyectiva, entonces la función $i_V \colon V \to A \otimes_{{}^{H^\dagger}\!A} V$, definida por $i_V(v) = 1 \otimes v$, es inyectiva y su imagen es ${}^{H^\dagger}(A \otimes_{{}^{H^\dagger}\!A} V)$.*

Definición 3.40. *Una* integral total *es una función H-colineal a derecha $g \colon H \to A$ tal que $g(1) = 1$.*

Proposición 3.41. *Las siguientes afirmaciones son verdaderas:*

1. *La función $(-,-)$ es sobreyectiva si y sólo si existe una integral total $g \colon H \to A$.*
2. *Existe $c \in A$ tal que $T \cdot c = 1$ y $ca = g_s(a)c$, para todo $a \in {}^{H^\dagger}\!A$ si y sólo si existe una integral total $g \colon H \to A$ que satisface $\mu_A \circ (g \otimes {}^{H^\dagger}\!A) = \mu_A \circ (A \otimes g) \circ s_{|H \otimes {}^{H^\dagger}\!A}$.*

Demostración. (1) Si $(-,-)$ es sobreyectiva, entonces existe $c \in A$ tal que $T \cdot c = 1$. Definamos $g(h) = \theta^{-1}(h) \cdot c$, donde $\theta \colon H^\dagger \to H$ es la biyección dada por $\theta(\varphi) = \varphi \rightharpoonup t$. Es evidente que g es $H^\dagger$-lineal y que

$$g(1) = \theta^{-1}(1) \cdot c = T \cdot c = 1.$$

Recíprocamente, si $g \colon H \to A$ es una integral total, entonces, por la Proposicion 3.7,

$$T \cdot g(t) = g(T \rightharpoonup t) = g(1) = 1,$$

de modo que la función $(-,-)$ es sobreyectiva.
(2) Sean $h \in H$ y $a \in {}^{H^\dagger}\!A$. Escribamos

$$\sum_i g_s(a)_i \otimes \theta^{-1}(h)_i = (s^{-1})^\flat(\theta^{-1}(h) \otimes g_s(a)).$$

Si $c \in A$ satisface las hipótesis del item (2), entonces

$$g(h)a = (\theta^{-1}(h) \cdot c)a = \theta^{-1}(h) \cdot (ca) = \theta^{-1}(h) \cdot (g_s(a)c) = \sum_i g_s(a)_i(\theta^{-1}(h)_i \cdot c),$$

donde la última igualdad se sigue de la Proposición 2.59. Por lo tanto, por la Proposición 3.15,

$$g(h)a = \mu_A \circ (A \otimes g) \circ s(h \otimes a). \tag{8.24}$$

Recíprocamente, si g satisface la ecuación (8.24), entonces $c = g(t)$ satisface

$$ca = \mu_A \circ (A \otimes g) \circ s(t \otimes a) = g_s(a)g(t) = g_s(a)c,$$

para todo $a \in {}^{H^\dagger}\!A$. □

Consideremos ahora la noción de ideal traza. Para cualquier anillo R y cualquier R-módulo M a derecha, denotamos con $\mathcal{T}(M)$ la imagen de la función de evaluación $\mathrm{Hom}(M_R, R_R) \otimes M \to R$. Es fácil ver que $\mathcal{T}(M)$ es un ideal bilátero de R. Es bien sabido que $\mathcal{T}(M) = R$ si y sólo si M es un generador de la categoría de R-módulos. Además, si R es un subanillo de un anillo S, entonces $\mathcal{T}(S) = R$ si y sólo si R es un R-sumando a derecha de S [Fa, 3.26 y 3.27]. Por supuesto, resultados análogos son válidos para R-módulos a izquierda.

El siguiente resultado generaliza [**20**, Proposition 1.9] y [**8**, Theorem 2.2]. Nuestra demostración sigue de cerca la dada en esos trabajos.

Proposición 3.42. *Sean* $\widehat{T}\colon A \to {}^{H^\dagger}\!A$ *y* $\widehat{U}\colon A \to {}^{H^\dagger}\!A$ *las funciones de traza definidas por* $\widehat{T}(a) = T \cdot a$ *y* $\widehat{U}(a) = a \cdot U$*, donde* $U = S(T)$*. Asumamos que* $({}^{H^\dagger}\!A \hookrightarrow A, s)$ *es* H*-Galois a derecha y consideremos* A *como un* $(A\#H^\dagger, {}^{H^\dagger}\!A)$*-bimódulo y un* $({}^{H^\dagger}\!A, A\#H^\dagger)$*-bimódulo vía las acciones dadas en la Sección 5. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. $\widehat{T}$ *es sobreyectiva.*
2. $\mathcal{T}(A_{{}^{H^\dagger}\!A}) = {}^{H^\dagger}\!A$.
3. ${}^{H^\dagger}\!A$ *es un* ${}^{H^\dagger}\!A$*-sumando directo a derecha de* A.
4. A *es un generador en la categoría de* ${}^{H^\dagger}\!A$*-módulos a derecha.*
5. A *es un* $A\#H^\dagger$*-módulo a izquierda finitamente generado y proyectivo.*
6. $\widehat{U}$ *es sobreyectiva.*
7. $\mathcal{T}({}_{{}^{H^\dagger}\!A}A) = {}^{H^\dagger}\!A$.
8. ${}^{H^\dagger}\!A$ *es un* ${}^{H^\dagger}\!A$*-sumando directo a izquierda de* A.
9. A *es un generador en la categoría de* ${}^{H^\dagger}\!A$*-módulos a izquierda.*
10. A *es un* $A\#H^\dagger$*-módulo a derecha finitamente generado y proyectivo.*

Asimismo cualquiera de estas condiciones implican que $A\#H^\dagger$ *y* ${}^{H^\dagger}\!A$ *son equivalentes Morita.*

Demostración. Del Corolario 3.36 se sigue fácilmente que $\mathcal{T}(A_{{}^{H^\dagger}\!A}) = T \cdot A$. Por lo tanto, los item (1) y (2) son equivalentes. El hecho de que (2) $\Leftrightarrow$ (3) $\Leftrightarrow$ (4) se deduce de los comentarios previos a esta proposición. Por el Teorema de Morita [**15**, 4.1.3] y los hechos de que

$$ {}^{H^\dagger}\!A \simeq \mathrm{End}({}_{A\#H^\dagger}A)^{\mathrm{op}} $$

por la Proposición 3.26 y

$$ A\#H^\dagger \simeq \mathrm{End}(A_{{}^{H^\dagger}\!A}) $$

por el Teorema 3.34 (2), es cierto que (4) $\Leftrightarrow$ (5). Finalmente, el item (4) y el Teorema 3.34 (2) aseguran que A es un ${}^{H^\dagger}\!A$-progenerador a derecha y $A\#H^\dagger \simeq \mathrm{End}(A_{{}^{H^\dagger}\!A})$, lo que implica que $A\#H^\dagger$ y ${}^{H^\dagger}\!A$ son equivalentes Morita [**15**, 4.29]. La equivalencia de (6), (7), (8), (9) y (10) puede probarse de un modo similar. Finalizamos la demostración observando que (1) $\Leftrightarrow$ (6), dado que $\widehat{U}(a) = a \cdot U = T \cdot g_s(a) = \widehat{T}(g_s(a))$. □

Observación 3.43. *Notemos que la hipótesis de que* $({}^{H^\dagger}\!A \hookrightarrow A, s)$ *es* H*-Galois a derecha no es necesaria para probar* (1) $\Rightarrow$ (2) $\Leftrightarrow$ (3) $\Leftrightarrow$ (4) $\Leftrightarrow$ (5), (6) $\Rightarrow$ (7) $\Leftrightarrow$ (8) $\Leftrightarrow$ (9) $\Leftrightarrow$ (10) *y* (1) $\Leftrightarrow$ (6).

Observación 3.44. *Sea* $\pi\colon A\#H^\dagger \to \mathrm{End}(A_{{}^{H^\dagger}\!A})$ *el morfismo introducido en el Teorema 3.34. Argumentando como en* [**7**, Proposition 1.6] *puede probarse que:*

1. *Si* $T \cdot c = 1$*, entonces* $\pi(Tc)$ *es una proyección* ${}^{H^\dagger}\!A$*-lineal a derecha de* A *sobre* ${}^{H^\dagger}\!A$.
2. *Asumamos que* $({}^{H^\dagger}\!A \hookrightarrow A, s)$ *es* H*-Galois a derecha. Por el Teorema 3.34, la función* π *es biyectiva y* $[-,-]$ *es sobreyectiva. Si los elementos* $x_1, \dots, x_r, y_1, \dots, y_r \in A$ *satisfacen que* $\sum_{i=1}^r [x_i, y_i] = 1$ *y* $p \in \mathrm{End}(A_{{}^{H^\dagger}\!A})$ *es una proyección de* A *sobre* ${}^{H^\dagger}\!A$*, entonces* $c = \sum_{i=1}^r g_s(e \cdot x_i) y_i$*, donde* $e = \pi^{-1}(p)$ *cumple que* $T \cdot c = 1$.
3. *Si* $T \cdot c = 1$ *y* $ca = g_s(a)c$ *para todo* $a \in {}^{H^\dagger}\!A$*, entonces* ${}^{H^\dagger}\!A$ *es un* ${}^{H^\dagger}\!A$*-bimódulo sumando directo de* A.
4. *Si* $({}^{H^\dagger}\!A \hookrightarrow A, s)$ *es* H*-Galois a derecha y* ${}^{H^\dagger}\!A$ *es un* ${}^{H^\dagger}\!A$*-bimódulo sumando directo de* A*, entonces* A *tiene un elemento de traza* 1 c*, tal que* $ca = g_s(a)c$ *para todo* $a \in {}^{H^\dagger}\!A$.

Corolario 3.45. *Sean* H *un álgebra de Hopf trenzada rígida y sea* (A, s) *un comódulo álgebra a derecha. Si* $H^\dagger$ *es semisimple, entonces* ${}^{H^\dagger}\!A$ *es un* ${}^{H^\dagger}\!A$*-bimódulo sumando directo de* A.

Demostración. Sea $T \in \int_{H^\dagger}^l$ tal que $\epsilon(T) = 1$. Por el Corolario 3.16 y la Observación 3.17, sabemos que $g_s = \mathrm{id}$ y por lo tanto $c = 1$ satisface la condición del item (3) de la Observación 3.44. □

El siguiente resultado generaliza los items (1) y (3) de la Observación 3.44.

Proposición 3.46. *Sean B una k-álgebra y M un $(A\#H^\dagger, B)$-bimódulo.*

1. *Si existe un elemento c de A de traza 1, entonces ${}^{H^\dagger}M$ es un B-sumando directo a derecha de M.*
2. *Si existe un elemento c de A de traza 1, tal que $ca = g_s(a)c$ para todo $a \in {}^{H^\dagger}A$, entonces ${}^{H^\dagger}M$ es un $({}^{H^\dagger}A, B)$-sumando directo de M.*

Demostración. Afirmamos que la función $p\colon M \to {}^{H^\dagger}M$, definida por $p(m) := (Tc)\cdot m$, es una proyección sobre ${}^{H^\dagger}M$. En efecto, para cada $m \in {}^{H^\dagger}M$, es cierto que

$$p(m) = (Tc)\cdot(m) = \sum_{(T),j}(T_{(1)}\cdot c_j)(T_{(2)_j}\cdot m) = (T\cdot c)m = m,$$

donde $\sum_j T_{(1)} \otimes c_j \otimes T_{(2)_j} := (H \otimes s)\circ(\Delta \otimes A)(T \otimes c)$. Esto muestra que la primera afirmación es verdadera. Para comprobar que también lo es la segunda basta observar que bajo la restricción adicional pedida en el item (2), la función p es ${}^{H^\dagger}A$-lineal a izquierda porque, para todo $a \in {}^{H^\dagger}A$, tenemos:

$$p(a\cdot m) = (Tca)\cdot m = (Tg_s^{-1}(a)c)\cdot m = (aTc)\cdot m = a\cdot((Tc)\cdot m) = a\cdot p(m),$$

donde la tercera igualdad vale por la compatibilidad de s con Δ y ϵ. □

Recordemos que un anillo A tiene el número de base invariante si en cada A-módulo M libre cada par de bases de M tiene igual cardinal. Dado tal anillo y un A-módulo libre M a izquierda, denotemos por $[M : A]_l$ la dimensión de M como A-módulo a izquierda. Análogamente si M es un A-módulo libre a derecha, entonces $[M : A]_r$ denotará la dimensión de M como A-módulo a derecha. El siguiente resultado generaliza el Corolario 8.3.5 de [**24**] y su prueba es similar a la dada allí.

Corolario 3.47. *Sean H un álgebra de Hopf trenzada rígida y (A, s) un H-comódulo álgebra a derecha. Se cumplen las siguientes afirmaciones*

1. *Si $A\#H^\dagger$ es simple, entonces $({}^{H^\dagger}A \hookrightarrow A, s)$ es H-Galois.*
2. *$A\#H^\dagger$ es simple y cualquiera de las condiciones de la Proposicion 3.42 vale si y sólo si la extensión $({}^{H^\dagger}A \hookrightarrow A, s)$ es H-Galois y ${}^{H^\dagger}A$ es simple.*
3. *$A\#H^\dagger$ es simple y artiniana si y sólo si ${}^{H^\dagger}A$ lo es, A es un ${}^{H^\dagger}A$-módulo libre a izquierda y derecha de rango $n = \dim H$ y $A\#H^\dagger \simeq M_n({}^{H^\dagger}A)$.*

Demostración. (1) A partir de la Proposición 3.29 sabemos que $[A, A] = ATA$ es un ideal bilátero de $A\#H^\dagger$. Por lo tanto, si $A\#H^\dagger$ es simple, entonces $A\#H^\dagger = [A, A]$ y por el Teorema 3.34, $({}^{H^\dagger}A \hookrightarrow A, s)$ es H-Galois.

(2) Asumamos que $A\#H^\dagger$ es simple y que vale cualquiera de las condiciones de la Proposición 3.42. Entonces, por el ítem (1), la extensión $({}^{H^\dagger}A \hookrightarrow A, s)$ es H-Galois. Por ende, la Proposición 3.42 implica que $A\#H^\dagger$ y ${}^{H^\dagger}A$ son equivalentes Morita y así ${}^{H^\dagger}A$ es simple. Recíprocamente, asumamos que $({}^{H^\dagger}A \hookrightarrow A, s)$ es H-Galois y ${}^{H^\dagger}A$ es simple. Por la equivalencia entre los ítems (1) y (2) del Teorema 3.34, la función $\widehat{T}\colon A \to {}^{H^\dagger}A$ no es nula, y dado que su imagen es un ideal bilátero de ${}^{H^\dagger}A$, es sobreyectiva. Luego, nuevamente por la Proposición 3.42, $A\#H^\dagger$ y ${}^{H^\dagger}A$ son equivalentes Morita y así $A\#H^\dagger$ is simple.

(3) Asumamos que $A\#H^\dagger$ es simple y artiniana. Luego, es von Neumann regular, y entonces existe $x \in A\#H^\dagger$ tal que $T = TxT$. Por la Proposición 3.39 la función $\widehat{T}: A \to {}^{H^\dagger}\!A$ es sobreyectiva. Luego, por la Proposición 3.42, $A\#H^\dagger$ y ${}^{H^\dagger}\!A$ son equivalentes Morita, y así, ${}^{H^\dagger}\!A$ es semisimple y artiniana. Se deduce entonces del lema de Artin-Whaples que A es un ${}^{H^\dagger}\!A$-módulo libre a izquierda, digamos de rango m. Pero, por el Teorema 3.34, sabemos que

$$A\#H^\dagger \simeq \mathrm{End}(A_{{}^{H^\dagger}\!A}) \simeq M_m({}^{H^\dagger}\!A).$$

Entonces

$$m^2 = [A\#H^\dagger : {}^{H^\dagger}\!A]_l = [A\#H^\dagger : A]_l[A : {}^{H^\dagger}\!A]_l = nm.$$

Luego $m = n$. Análogamente A es un ${}^{H^\dagger}\!A$-módulo libre a derecha de rango n. La afirmación recíproca es trivial. □

Teorema 3.48. *Sean H un álgebra de Hopf trenzada rígida y (D, s) un H-comódulo álgebra a derecha, donde D es un anillo de división. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *$({}^{H^\dagger}\!D \hookrightarrow D, s)$ es H-Galois.*
2. *$[D : {}^{H^\dagger}\!D]_r = \dim H$.*
3. *$[D : {}^{H^\dagger}\!D]_l = \dim H$.*
4. *$D\#H^\dagger$ es simple.*
5. *D es un $D\#H^\dagger$-módulo a derecha fiel.*
6. *D es un $D\#H^\dagger$-módulo a izquierda fiel.*

Demostración. Argumentando como en [**24**, Theorem 8.3.7] se ve que (1) ⇒ (5), (1) ⇒ (6), (5) ⇒ (4), (6) ⇒ (4), (2) ⇒ (1) y (3) ⇒ (1). El Corolario 3.47 implica que (4) ⇒ (1), (1) ⇒ (2) y (1) ⇒ (3). □

Ejemplo 3.49. *Sea H el álgebra $k[X]/\langle X^2\rangle$, provista con la estructura de álgebra de Hopf dada por*

$$\Delta(X) = 1 \otimes X + X \otimes 1 \qquad y \qquad c(X \otimes X) = -X \otimes X.$$

Es fácil verificar que $H^\dagger \simeq H$. En efecto, si ϵ, ξ_X es la base dual de $1, X$, entonces la función $1 \mapsto \epsilon$, $X \mapsto \xi_X$ es un isomorfismo. En [**11**, Example 2.4] *se mostró que si*

1. *$\alpha: A \to A$ es un automorfismo,*
2. *$\delta: A \to A$ es una α-derivación,*
3. *$\delta \circ \alpha + \alpha \circ \delta = 0$,*
4. *$\delta^2 = 0$,*

entonces las fórmulas

$$s(\xi_X \otimes a) = \alpha(a) \otimes \xi_X \qquad y \qquad \rho(\xi_X \otimes a) = \delta(a)$$

definen una transposición $s: H^\dagger \otimes A \to A \otimes H^\dagger$ y una s-acción $\rho: H^\dagger \otimes A \to A$. Por la Proposición 3.13, la función

$$^\flat(s^{-1}): H \otimes A \longrightarrow A \otimes H,$$

definida al comienzo de la Sección 2 de este capítulo, es una transposición y, por el Teorema 3.22, sabemos que $(A, {}^\flat(s^{-1}))$ es un H-comódulo álgebra a derecha vía la aplicación $\nu_\rho: A \to A \otimes H$, introducida luego de la Proposición 2.28. Un cálculo directo muestra que

$$^\flat(s^{-1})(X \otimes a) = \alpha^{-1}(a) \otimes X \qquad y \qquad \nu_\rho(a) = a \otimes 1 + \alpha^{-1} \circ \delta(a) \otimes X.$$

Los siguientes ejemplos concretos satisfacen las hipótesis del Teorema 3.48.

1. *$k = \mathbb{Q}$, $A = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$, $\alpha(a + b\sqrt{2}) = a - b\sqrt{2}$ y $\delta(a + b\sqrt{2}) = b$.*

2. *A el cuerpo de series de Laurent* $\sum a_i Y^i$ *con coeficientes en k,* $\alpha(\sum a_i Y^i) = \sum(-1)^i a_i Y^i$ *y* $\delta(\sum a_i Y^i) = \sum a_{2i+1} Y^{2i}$.

En efecto, en el primer ejemplo ${}^{H^\dagger}\!A = \mathbb{Q}$ *y entonces* $[A : {}^{H^\dagger}\!A]_r = 2 = \dim H$*, y en el segundo* ${}^{H^\dagger}\!A = \{\sum_i a_{2i} Y^{2i}\}$ *y por ende* $[A : {}^{H^\dagger}\!A]_r = 2 = \dim H$.

De aquí en adelante, dado H-espacio trenzado a izquierda (V, s), denotaremos con $\widetilde{s}$ a la función $(((s^{-1})^\flat)^{-1})^\flat$.

Sean H una biálgebra trenzada rígida y (A, s) un H-comódulo álgebra a derecha. Entonces $(A, (s^{-1})^\flat)$ es un $H^\dagger$-módulo álgebra a izquierda. Consideremos el producto apareado $A\#H^\dagger$ y escribamos

$$\breve{s} = (A \otimes c_{H^\dagger}) \circ ((s^{-1})^\flat \otimes H^\dagger).$$

Observemos que, con las notaciones de la Proposición 2.83, tenemos $\breve{s} = \widehat{(s^{-1})^\flat}$. Por la Proposición 2.84, sabemos que $(A\#H^\dagger, \breve{s})$ es un $H^\dagger$-comódulo álgebra a derecha vía $\nu_\Delta := A \otimes \Delta_{H^\dagger}$. En consecuencia, por el Teorema 3.22, el par $(A\#H^\dagger, (\breve{s}^{-1})^\flat)$ es un $H^{\dagger\dagger}$-módulo álgebra a izquierda vía ρ_{ν_Δ}. Denotemos con $\Psi * (a\#\varphi)$ a la aplicación $\rho_{\nu_\Delta}(\Psi \otimes a\#\varphi)$.

Sea H un álgebra de Hopf trenzada rígida. Dada una integral a izquierda no nula $T \in H^\dagger$ denotemos con $\mathcal{T}$ la única integral a izquierda de $H^{\dagger\dagger}$ tal que $\mathcal{T}(T) = 1$. Observemos que $\mathcal{T} = t^{**}$, donde t es la integral a izquierda de H que satisface que $T(t) = 1$.

Proposición 3.50. *Las siguientes afirmaciones son verdaderas:*

1. $(\breve{s}^{-1})^\flat = (A \otimes c_{H^{\dagger\dagger}H^\dagger}) \circ (\widetilde{s} \otimes H^\dagger)$.
2. $\mathcal{T} * T = \epsilon$.

Demostración. (1) Un cálculo directo muestra que si (V, s_V) y (W, s_W) son $H^\dagger$-espacios trenzados, entonces

$$(s_{V\otimes W}^{-1})^\flat = (V \otimes (s_W^{-1})^\flat) \circ ((s_V^{-1})^\flat \otimes W).$$

Usando esto, resulta inmediatamente que

$$(\breve{s}^{-1})^\flat = (A \otimes (c_{H^\dagger}^{-1})^\flat) \circ (\widetilde{s} \otimes H^\dagger) = (A \otimes c_{H^{\dagger\dagger}H^\dagger}) \circ (\widetilde{s} \otimes H^\dagger).$$

(2) Sean $\Psi \in H^{\dagger\dagger}$ y $\varphi \in H^\dagger$. Usando la Figura 31 y que T y $\mathcal{T}$ son integrales a izquierda que

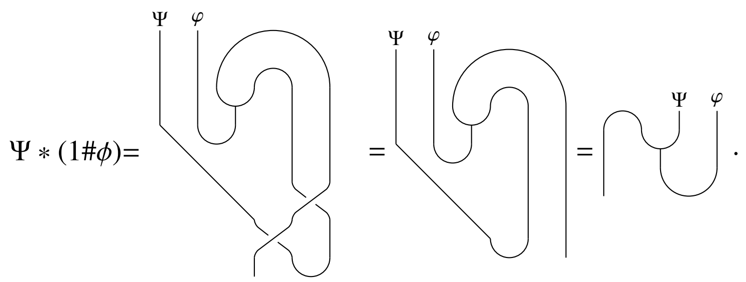


Figura 31

satisfacen que $\mathcal{T}(T) = 1$, obtenemos que $\mathcal{T} * T = \epsilon$. □

La siguiente observación es una adaptación de [**7**, Remark 0.1].

Observación 3.51. *Sea $({}^{H^\dagger}\!A \hookrightarrow A, s)$ una extensión H-Galois a derecha. Por el Teorema 3.34 existe $\sum_i x_i \otimes y_i \in A \otimes_{{}^{H^\dagger}\!A} {}^{g}\!A$ tal que $\sum_i [x_i, y_i] = 1$. Entonces, para todo $a \in A$,*

$$a = \sum_i [x_i, y_i] \cdot a = \sum_i x_i (y_i, a) = \sum_i x_i T \cdot (y_i a)$$

y

$$a = a \leftarrow \sum_i [x_i, y_i] = \sum_i (a, x_i) \triangleright y_i = \sum_i g_s(T \cdot (a x_i)) y_i = \sum_i q^{-1}(T \cdot g_s(a x_i)) y_i,$$

donde $q \in k$ es tal que $c_{H^\dagger}(T \otimes T) = qT \otimes T$ y la última igualdad puede verificarse fácilmente usando el Corolario 3.16 y el Lema 2.66. En particular,

$$1 = \sum_i x_i (T \cdot y_i) = \sum_i q^{-1}(T \cdot g_s(x_i)) y_i.$$

Además, por los teoremas de Morita, la sobreyectividad de $[-,-]$ implica su inyectividad. Por lo tanto,

1. *Si $\sum_i u_i \otimes v_i \in A \otimes_{{}^{H^\dagger}\!A} {}^{g}\!A$ satisface que $\sum_i [u_i, v_i] a = g_s(a) \sum_i [u_i, v_i]$ para todo $a \in A$, entonces*
$$\sum_i g_s(a) u_i \otimes v_i = \sum_i u_i \otimes v_i a \quad \text{para todo } a \in A.$$
2. *Si $\sum_i u_i \otimes v_i \in A \otimes_{{}^{H^\dagger}\!A} {}^{g}\!A$ es tal que $\sum_i [u_i, v_i] \in C_{A\#H^\dagger}(A)$ (el centralizador de A en $A\#H^\dagger$), entonces*
$$\sum_i a u_i \otimes v_i = \sum_i u_i \otimes v_i a \quad \text{para todo } a \in A.$$

El siguiente resultado generaliza el Teorema 1.8 de [7] y su demostración sigue de cerca la dada en dicho trabajo.

Teorema 3.52. *Sean H un álgebra de Hopf trenzada rígida y (A, s) un H-comódulo álgebra a derecha. Asumamos que $({}^{H^\dagger}\!A \hookrightarrow A, s)$ es una extensión de Galois. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *$A/{}^{H^\dagger}\!A$ es separable.*
2. *Existe $w \in A\#H^\dagger$ tal que $\mathcal{T} * w = 1$ y $wa = g_s^{-1}(a) w$ para todo $a \in A$.*
3. *A es un sumando directo de $A\#H^\dagger$ como A-bimódulo.*
4. *Sea $\sum_{i\in I} x_i \otimes y_i \in A \otimes_{{}^{H^\dagger}\!A} {}^{g}\!A$ tal que $\sum_{i\in I} [x_i, y_i] = 1$. Existe $c \in A$ tal que $\sum_{i\in I} x_i c y_i = 1$ y $ac = c g_s(a)$ para todo $a \in {}^{H^\dagger}\!A$.*

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2) Sea $\sum_{j\in J} a_j \otimes b_j$ un idempotente de separabilidad de $A/{}^{H^\dagger}\!A$. Sea

$$w := \sum_{j\in J} g_s^{-1}(a_j) T b_j \in A\#H^\dagger,$$

donde g_s es como en el Teorema 2.20. El Corolario 3.16 implica que $g_s = g_{\tilde{s}}$. Usando este hecho, que $A = {}^{H^{\dagger\dagger}}(A\#H^\dagger)$ y la Proposición 3.50, obtenemos

$$\mathcal{T} * w = \sum_{j\in J} a_j (\mathcal{T} * T) b_j = \sum_{j\in J} a_j b_j = 1.$$

Además,

$$wa = \sum_{j\in J} g_s^{-1}(a_j) T b_j a = \sum_{j\in J} g_s^{-1}(a a_j) T b_j = g_s^{-1}(a) w,$$

para todo $a \in A$, dado que $\sum_{j\in J} a_j \otimes b_j a = \sum_{j\in J} a a_j \otimes b_j$.

(2) ⇒ (1) Dado que g_s y $[-,-]$ son funciones biyectivas, existe $\sum_{i\in I} u_i \otimes v_i \in A \otimes_{H^\dagger A} {}^g A$, tal que

$$\sum_{i\in I} [g_s^{-1}(u_i), v_i] = w.$$

Además, puesto que

$$\sum_{i\in I} [g_s^{-1}(au_i), v_i] = g_s^{-1}(a)w = wa = \sum_{i\in I} [g_s^{-1}(u_i), v_i a],$$

se tiene

$$\sum_{i\in I} au_i \otimes v_i = \sum_{i\in I} u_i \otimes v_i a.$$

Finalmente,

$$\sum_{i\in I} u_i v_i = \sum_{i\in I} u_i \mathcal{T} * T v_i = m\mathcal{T} * \left(\sum_{i\in I} g_s^{-1}(u_i) T v_i \right) = \mathcal{T} * w.$$

(2) ⇔ (3) Esto se sigue inmediatamente del Corolario 3.16 y el ítem (3) de la Observación 3.44 aplicada al $H^{\dagger\dagger}$-módulo álgebra a izquierda $A\#H^\dagger$.

(1) ⇒ (4) Sea $\sum a_i \otimes b_i \in A \otimes_{H^\dagger A} A$ un idempotente de separabilidad de $A/{}^{H^\dagger}A$. Escribamos $c := \sum_j q^{-1} a_j T \cdot g_s(b_j)$, donde $q \in k$ es tal que $c_{H^\dagger}(T \otimes T) = qT \otimes T$. Por la Observación 3.51,

$$\sum_i x_i c y_i = \sum_{ij} q^{-1} x_i a_j T \cdot g_s(b_j) y_i = \sum_{ij} q^{-1} a_j T \cdot g_s(b_j x_i) y_i = \sum_j a_j b_j = 1,$$

donde la segunda igualdad se deduce del hecho de que

$$\sum_j x_i a_j \otimes b_j = \sum_j a_j \otimes b_j x_i.$$

Además, usando que $\sum a_i \otimes b_i$ es un elemento de separabilidad y la Proposición 2.59, podemos ver que

$$ac = \sum_j q^{-1} a a_j T \cdot g_s(b_j) = \sum_j q^{-1} a_j T \cdot g_s(b_j a) \sum_j q^{-1} a_j T \cdot g_s(b_j) g_s(a) = c g_s(a)$$

para todo $a \in {}^{H^\dagger}A$.

(4) ⇒ (1) Puesto que $ac = cg_s(a)$ para todo $a \in {}^{H^\dagger}A$, la función

$$\Upsilon \colon A \otimes_{H^\dagger A} {}^g A \longrightarrow A \otimes_{H^\dagger A} A,$$

dada por $\Upsilon(x \otimes y) = xc \otimes y$, está bien definida. Sea

$$\sum_i a_i \otimes b_i = \sum_i x_i c \otimes y_i = \Upsilon\left(\sum_i x_i \otimes y_i \right).$$

Por el ítem (2) de la Observación 3.51, la igualdad $\sum_i aa_i \otimes b_i = \sum_i a_i \otimes b_i a$ se satisface para todo $a \in A$, y por hipótesis, $\sum a_i b_i = \sum_i x_i c y_i = 1$. □

Corolario 3.53. *Sea H un álgebra de Hopf trenzada semisimple. Sea t una integral a izquierda de H tal que $\epsilon(t) = 1$. Sea $A\#_f H$ un producto cruzado en el sentido de la Definición 2.74. Si f es inversible, entonces $A\#_f H$ es una extensión separable de A.*

Demostración. Sea s la transposición de H sobre A. Por el Teorema 2.87 sabemos que $(A \hookrightarrow A\#_f H, \hat{s})$ es una extensión de Galois a derecha. Por lo tanto, por el Teorema 3.52, el comentario que sigue al Teorema 1.28, y la Observación 2.21, debemos elegir un $w \in (A\#_f H)\#H^\dagger$ tal que $bw = wb$ para todo $b \in A\#_f H$ y $\mathcal{T} \star w = 1$. Pero un cálculo sencillo muestra que $w = 1\#1\#\epsilon$ satisface estas condiciones. □

El siguiente resultado generaliza un teorema debido a Doi.

Corolario 3.54. *Sean H un álgebra de Hopf trenzada semisimple y (A, s) un H-comódulo álgebra a derecha. Sea t una integral a izquierda de H tal que $\epsilon(t) = 1$. Si $({}^{H^\dagger}\!A \hookrightarrow A, s)$ es una extensión de Galois, entonces $A/{}^{H^\dagger}\!A$ es separable.*

Demostración. El elemento $w := 1\#\epsilon$, satisface la condición (2) del Teorema 3.52. □

Notemos que el Corolario 3.53 es un caso particular del Corolario 3.54.

Recordemos que una biálgebra trenzada H es coconmutativa si $c_H \circ \Delta_H = c_H$ y c_H es involutiva. Los siguientes resultados generalizan el Teorema 1.11 de [**7**].

Teorema 3.55. *Sean H un álgebra de Hopf trenzada rígida coconmutativa con trenza c y $s\colon H \otimes A \to A \otimes H$ una transposición. Sea $A\#_f H$ un producto cruzado en el sentido de la Definición 2.74. Si existe una integral a izquierda t de H y un elemento c de A tal que:*

1. *$t \cdot c = 1$,*
2. *$c(t \otimes h) = h \otimes t$ para todo $h \in H$,*
3. *$s(h \otimes c) = c \otimes h$ para todo $h \in H$,*
4. *$s(t \otimes a) = a \otimes t$ para todo $a \in A$,*

entonces $A\#_f H$es un extensión separable de A.

Demostración. Por el Teorema 2.87 sabemos que $(A \hookrightarrow A\#_f H, \widehat{s})$ es una extensión H-Galois a derecha con transposición $\widehat{s} = (A \otimes c) \circ (s \otimes H)$ y coacción $\nu = A \otimes \Delta$. Sea

$$\gamma\colon H \longrightarrow A\#_f H$$

la función definida por $\gamma(h) = 1\#_f h$ y sea γ^{-1} la inversa de γ respecto de la convolución. Sea

$$w = (\gamma^{-1}(u_{(1)})\#T)(c\#_f u_{(2)}\#\epsilon),$$

donde $u = S(t)$ y T es una integral a izquierda de $H^\dagger$ que cumple que $T(t) = 1$. Por el Teorema 3.52 (aplicado a $(A \hookrightarrow A\#_f H)$) debemos ver que

$$\mathcal{T} * w = 1\#_f 1\#\epsilon \qquad \text{y} \qquad w(a\#_f l) = (a\#_f l)w,$$

para todo $a \in A$ y $l \in H$. Sea $\widetilde{\widehat{s}}\colon H^{\dagger\dagger} \otimes (A\#_f H) \to (A\#_f H) \otimes H^{\dagger\dagger}$ como en losd comentarios que preceden a la Proposición 3.50. Por el Corolario 3.16, sabemos que $g_{\widetilde{\widehat{s}}} = g_{\widehat{s}} = \mathrm{id}$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\mathcal{T} * w &= (\gamma^{-1}(u_{(1)})\#\epsilon)(\mathcal{T} * (1\#_f 1\#T))(c\#_f u_{(2)}\#\epsilon)\\
&= (\gamma^{-1}(u_{(1)})\#\epsilon)(c\#_f u_{(2)}\#\epsilon)\\
&= (\gamma^{-1}(u_{(1)})\#\epsilon)(1\#_f u_{(2)}\#\epsilon)(S(u_{(3)}) \cdot c\#_f 1\#\epsilon)\\
&= S(u) \cdot c\#_f 1\#\epsilon\\
&= 1\#_f 1\#\epsilon,
\end{aligned}$$

donde la segunda igualdad se deduce del ítem (2) de la Proposición 3.50 y la tercera de la hipótesis y del hecho de que, puesto que H es coconmutativa,

$$(H \otimes c) \circ (\Delta \otimes S) \circ \Delta = (H \otimes S \otimes H) \circ (H \otimes c) \circ (H \otimes \Delta) \circ \Delta = (H \otimes S \otimes H) \circ (H \otimes \Delta) \circ \Delta.$$

Por la biyectividad de

$$[-,-]\colon A\#_f H \otimes_A A\#_f H \to A\#_f H\#H^\dagger,$$

para verificar que $w(a\#_f l) = (a\#_f l)w$, alcanza con probar que para cada $z \in A\#H$,

$$z(\gamma^{-1}(u_{(1)})) \otimes_A c\gamma(u_{(2)}) = \gamma^{-1}(u_{(1)}) \otimes_A c\gamma(u_{(2)})z.$$

Sea $z = a \in A$. Para $h \in H$ y $b \in A$, escribimos $\sum_i b_i \otimes h_i = s(h \otimes b)$. Dado que

$$h \cdot b = \sum_i \gamma(h_{(1)})(b_i \#_f 1)\gamma^{-1}(h_{(2)_i}),$$

tenemos que

$$\begin{aligned}
\gamma^{-1}(u_{(1)}) \otimes_A c\gamma(u_{(2)})a &= \sum_{ij} \gamma^{-1}(u_{(1)}) \otimes_A c\gamma(u_{(2)})a_{ij}\gamma^{-1}(u_{(3)_j})\gamma(u_{(4)_i}) \\
&= \sum_{ij} \gamma^{-1}(u_{(1)})(\gamma(u_{(2)})a_{ij}\gamma^{-1}(u_{(3)_j}) \otimes_A c\gamma(u_{(4)_i}) \\
&= \sum_{ij} a_{ij}\gamma^{-1}(u_{(1)_j}) \otimes_A c\gamma(u_{(2)_i}) \\
&= a\gamma^{-1}(u_{(1)}) \otimes_A c\gamma(u_{(2)}).
\end{aligned}$$

Ahora sea $z = 1\#l$. Para $h, h' \in H$, escribamos $\sum_i h'_i \otimes h_i := c(h \otimes h')$. Como

$$f(h, h') = \sum_i \gamma(h_{(1)})\gamma(h'_{(1)_i})\gamma^{-1}(h_{(2)_i}h'_{(2)}),$$

es cierto que

$$\begin{aligned}
\gamma^{-1}(u_{(1)}) \otimes_A c\gamma(u_{(2)})z &= \sum_i \gamma^{-1}(u_{(1)}) \otimes_A cf(u_{(2)}, l_{(1)_i})\gamma(u_{(3)_i}l_{(2)}) \\
&= \sum_i \gamma^{-1}(u_{(1)})f(u_{(2)}, l_{(1)_i}) \otimes_A c\gamma(u_{(3)_i}l_{(2)}) \\
&= \sum_{ij} \gamma(l_{(1)_{ij}})\gamma^{-1}(u_{(1)_j}l_{(2)}) \otimes_A c\gamma(u_{(2)_i}l_{(2)}) \\
&= z\gamma^{-1}(u_{(1)}) \otimes_A c\gamma(u_{(2)}).
\end{aligned}$$

Esto completa la demostración. □

Corolario 3.56. *Bajo las hipótesis del Teorema 3.55, si A es semisimple y artiniana, entonces $A\#_f H$ también lo es.*

Lema 3.57. *Sean H un álgebra de Hopf trenzada rígida y H' una subálgebra de Hopf trenzada de H. Sea $t' \in H' \setminus \{0\}$ una integral a izquierda. Si $H^\dagger$ es semisimple, entonces existe $T \in \int_l^{H^\dagger}$ tal que $T \leftharpoonup t' = 1$.*

Demostración. Como k es un cuerpo, es suficiente probar que $T \leftharpoonup t' \neq 0$. Supongamos que $T \leftharpoonup t' = 0$ y escribamos $\Delta(t') := \sum_i s_i \otimes t_i$, donde $\{s_i\}$ y $\{t_i\}$ son bases de H'. Por la independencia de los $\{s_i\}$, de las igualdades

$$0 = T \leftharpoonup t' = \sum_i s_i T(t_i)$$

se deduce que $T(t_i) = 0$ para todo i, por lo que $T(H') = 0$. Pero esto contradice el hecho de que $\epsilon(T) = T(1) \neq 0$. □

Teorema 3.58. *Sean H un álgebra de Hopf trenzada semisimple y $H^{\dagger'} \subseteq H^\dagger$ una subálgebra de Hopf trenzada de $H^\dagger$. Sean $T' \in \int_l^{H^{\dagger'}} \setminus\{0\}$ y $T \in \int_l^{H^\dagger} \setminus\{0\}$. Asumamos que existe $\varphi, \psi \in H^\dagger$ tal que $T = T'\varphi = \psi T'$. Si (A, s) es un H-comódulo álgebra de Galois a derecha con un elemento de traza 1 y $(s^{-1})^\flat(H^{\dagger'} \otimes A) \subseteq A \otimes H^{\dagger'}$, entonces ${}^{H^{\dagger'}}\!A/{}^{H^\dagger}\!A$ es separable.*

Demostración. Seguiremos de cerca la demostración de [**7**, Theorem 1.15]. Sea

$$\sum_i x_i \otimes y_i \in A \otimes_{H^\dagger A} A$$

tal que $\sum_i [x_i, y_i] = 1$ y sea $c \in A$ un elemento de traza uno. Afirmamos que

$$\sum_i T' \cdot x_i \otimes_{H^\dagger A} T' \cdot (y_i(\varphi \cdot c))$$

es un idempotente de separabilidad de ${}^{H'}\!A/{}^{H^\dagger}\!A$. Por el Lema 3.57 sabemos que existe una integral a izquierda $\mathcal{T}$ of $H^{\dagger\dagger}$ tal que $\mathcal{T} * T' = \epsilon$. Como

$$\sum_i (T' \cdot x_i) y_i = \mathcal{T} * \sum_i (T' \cdot x_i) T y_i = \mathcal{T} * \sum_i T' x_i T y_i = \mathcal{T} * T' = \epsilon,$$

es cierto que

$$\sum_i (T' \cdot x_i)(T' \cdot (y_i(\varphi \cdot c))) = T' \cdot \sum_i (T' \cdot x_i)(y_i(\varphi \cdot c)) = T' \cdot (\varphi \cdot c) = (T'\varphi) \cdot c = T \cdot c = 1.$$

Para completar la demostración sólo resta verificar que

$$\sum_i wT' \cdot x_i \otimes_{H^\dagger A} T' \cdot (y_i(\varphi \cdot c)) = \sum_i T' \cdot x_i \otimes_{H^\dagger A} T' \cdot (y_i(\varphi \cdot c)) w \tag{8.25}$$

para todo $w \in {}^{H'}\!A$. Para probar (8.25) usaremos que, para todo $w \in {}^{H^{\dagger'}}\!A$,

1. $\sum_i (T' \cdot x_i) T(y_i(\varphi \cdot c) w) = w$,
2. $\sum_i (T \cdot (w x_i)) T'(y_i(\varphi \cdot c)) = w$,
3. $T \cdot (y_j(\varphi \cdot c) T' \cdot (w x_i)) = T \cdot (T' \cdot (y_j(\varphi \cdot c) w) x_i)$.

La demostración de 1) es similar a la de 2) pero más sencilla. Veamos entonces que vale 2). Observemos primero que existe un álgebra de Hopf trenzada cociente H' of H tal que $H^{\dagger'} \simeq H'^{\dagger}$. Puesto que H es semisimple, la función g_s introducida en el Teorema 1.28 es la función identidad. Por el Corolario 3.16 tenemos además que $g_{(s^{-1})^\flat} = \mathrm{id}$ y, en consecuencia,

$$(s^{-1})^\flat (T \otimes a) = a \otimes T \quad \text{para todo } a \in A.$$

Análogamente, dado que H' es semisimple,

$$(s^{-1})^\flat (T' \otimes a) = a \otimes T' \quad \text{para todo } a \in A.$$

Además, por la Observación 3.17 sabemos que $c_{H^\dagger}(T \otimes T) = T \otimes T$. Por lo tanto la Observación 3.51 implica que

$$a = \sum_i x_i T \cdot (y_i a) = \sum_i (T \cdot (a x_i)) y_i, \quad \text{para todo } a \in A.$$

Usando todos estos resultados obtenemos que

$$\begin{aligned}\sum_i (T \cdot (w x_i)) T'(y_i(\varphi \cdot c)) &= T' \cdot \sum_i (T \cdot (w x_i)) y_i (\varphi \cdot c) = T' \cdot (w(\varphi \cdot c)) \\ &= wT' \cdot (\varphi \cdot c) = w(T'\varphi) \cdot c = wT \cdot c = w.\end{aligned}$$

Verifiquemos ahora vale (3). Un cálculo directo que

$$\begin{aligned} T \cdot (y_j(\varphi \cdot c) T' \cdot (w x_i)) &= T \cdot (y_j(\varphi \cdot c) w (T' \cdot x_i)) \\ &= \psi \cdot (T' \cdot (y_j(\varphi \cdot c) w)(T' \cdot x_i)) \\ &= T \cdot (T' \cdot (y_j(\varphi \cdot c) w) x_i). \end{aligned}$$

Ahora la siguiente cuenta

$$\begin{aligned}\sum_i w(T'\cdot x_i)\otimes_{H^\dagger A} T'\cdot(y_i(\varphi\cdot c)) &= \sum_i T'\cdot(wx_i)\otimes_{H^\dagger A} T'\cdot(y_i(\varphi\cdot c))\\ &= \sum_{i,j}(T'\cdot x_j)T\cdot(y_j(\varphi\cdot c)T'\cdot(wx_i))\otimes_{H^\dagger A} T'\cdot(y_i(\varphi\cdot c))\\ &= \sum_{i,j} T'\cdot x_j\otimes_{H^\dagger A} T\cdot(y_j(\varphi\cdot c)T'\cdot(wx_i))T'\cdot(y_i(\varphi\cdot c))\\ &= \sum_{i,j} T'\cdot x_j\otimes_{H^\dagger A} T\cdot(T'\cdot(y_j(\varphi\cdot c)w)x_i)T'\cdot(y_i(\varphi\cdot c))\\ &= \sum_{j} T'\cdot x_j\otimes_{H^\dagger A} T'\cdot(y_j(\varphi\cdot c)w)\\ &= \sum_{i} T'\cdot x_j\otimes_{H^\dagger A} T'\cdot(y_j(\varphi\cdot c))w,\end{aligned}$$

en la que la segunda igualdad se deduce de 1), la cuarta de 3) y la quinta de 2), prueba que se satisface la igualdad (8.25), como queremos. □

Sea G un grupo finito. Las estructuras de $k[G]$-módulo álgebra fueron descriptas en el Teorema 2.19 y el Ejemplo 2.78.

Corolario 3.59. *Sea (A,s) un $k[G]$-módulo álgebra. Si A tiene un elemento de traza 1, entonces para cada subgrupo $G'<G$ la extensión ${}^{G'}\!A/{}^{G}\!A$ es separable.*

Demostración. La demostración dada en [**7**, Corollary 1.18] funciona sin problemas en nuestro contexto. □

Corolario 3.60. *Sean H un álgebra de Hopf trenzada semisimple y $H^{\dagger'}\subseteq H^\dagger$ una subálgebra de Hopf trenzada de $H^\dagger$. Sean*

$$T'\in\int_l^{H^{\dagger'}}\setminus\{0\}\qquad y\qquad T\in\int_l^{H^\dagger}\setminus\{0\}.$$

Asumamos que $H^\dagger$ también es semisimple, que $T(1)=1$ y que existe $\varphi\in H^\dagger$ tal que $T=T'\varphi$. Si (A,s) es un H-comódulo álgebra de Galois a derecha y

$$(s^{-1})^\flat(H^{\dagger'}\otimes A)\subseteq A\otimes H^{\dagger'},$$

entonces ${}^{H^{\dagger'}}\!A/{}^{H^\dagger}\!A$ es separable.

Demostración. El elemento $c=1$ es un elemento de traza 1 porque $\epsilon(T)=T(1)=1$ y $\epsilon(T')\neq 0$, dado que

$$1=\epsilon(T)=\epsilon(T')\epsilon(\varphi).$$

Como $T=S(T)=S(\varphi)S(T')=S(\varphi)T'$, se satisfacen las hipótesis del Teorema 3.58. El resultado se sigue inmediatamente de dicho teorema. □

Capítulo 4

Extensiones cleft de una familia de álgebras de Hopf trenzadas

En el trabajo [**19**], los autores asociaron una k-álgebra de Hopf $H_{\mathcal{D}}$, con cada dato $\mathcal{D} := (G, \chi, z, \lambda)$, consistente de :

- un grupo finito G,
- un caracter χ de G con valores en k,
- un elemento central z de G,
- un elemento $\lambda \in k$,

tal que $\chi^n = 1$ o $\lambda(z^n - 1) = 0$, donde n es el orden de $\chi(z)$. Como álgebra $H_{\mathcal{D}}$ está generada por los elementos de G sujetos a las relaciones de G, y x sujeto a las relaciones

$$xg = \chi(g)gx \quad \text{para todo } g \in G \qquad \text{y} \qquad x^n = \lambda(z^n - 1).$$

La estructura de coalgebra de $H_{\mathcal{D}}$ está determinada por

$$\begin{aligned} &\Delta(g) := g \otimes g \quad \text{para } g \in G, && \Delta(x) := 1 \otimes x + x \otimes z,\\ &\epsilon(g) := 1 \quad \text{para } g \in G, && \epsilon(x) := 0, \end{aligned}$$

y su antípoda está determinada por las igualdades

$$S(g) = g^{-1} \quad \text{y} \quad S(x) = -xz^{-1}.$$

Como se señaló en [**19**], el conjunto $\{gx^m | g \in G, 0 \leq m < n\}$ es una base de $H_{\mathcal{D}}$ como espacio vectorial. Consecuentemente $\dim H_{\mathcal{D}} = n|G|$. Las álgebras $H_{\mathcal{D}}$ son llamadas *álgebra de Hopf de rango 1*. El ejemplo más simple es el álgebra de Taft H_{n^2} ($n \geq 2$), que es el álgebra de Hopf de rango 1 obtenida tomando $\mathcal{D} := (C_n, \chi, g, 1)$, donde $C_n = \langle g \rangle$ es el grupo cíclico de orden n and $\chi(g)$ es una raíz primitiva de orden n de 1.

En [**25**] Masuoka estudió las extensiones cleft de las álgebras de Taft, dando una descripción elegante de sus productos cruzados. En [**14**] la descripción de Masuoka fué reproducida con pruebas simplificadas, y estudiando esta descripción derivaron varias consecuencias interesantes. Con esta motivación, en este capítulo se introduce una familia de álgebras de Hopf trenzadas que generaliza a las álgebras $H_{\mathcal{D}}$, y se estudian sus extensiones cleft.

1. Una familia de álgebras de Hopf trenzadas

Sea G un grupo finito, $\chi\colon G \to k^{\times}$ un caracter, $U \in kG$, donde kG denota el álgebra de grupo de G con coeficientes en k y $n \in \mathbb{N}$ mayor que 1. Sea $\mathcal{E} := (G, \chi, U, n)$ y escribamos $U := \sum_{g\in G} \lambda_g g$.

Proposición 4.1. *Existe un álgebra asociativa $B_{\mathcal{E}}$ tal que*

- *$B_{\mathcal{E}}$ es generada por G y un elemento $x \in B_{\mathcal{E}} \setminus kG$,*
- *$\mathcal{B} := \{gx^i : g \in G$ y $0 \le i < n\}$ es una base de $B_{\mathcal{E}}$ como k-espacio vectorial,*
- *la multiplicación de elementos de $\mathcal{B}$ está dada por:*

$$gx^i hx^j := \begin{cases} \chi^i(h) ghx^{i+j} & \text{si } i+j < n, \\ \chi^i(h) ghUx^{i+j-n} & \text{si } i+j \ge n, \end{cases}$$

si y sólo si $\lambda_{hgh^{-1}} = \chi^n(h)\lambda_g$ para todo $h, g \in G$ y $\chi(g) = 1$ para todo $g \in G$ tal que $\lambda_g \neq 0$.

Demostración. Sea $V := kx_0 \oplus \cdots \oplus kx_{n-1}$, donde $x_0, \dots, x_{n-1}$ son indeterminadas. Probaremos el resultado mostrando que existe un álgebra asociativa y unitaria $kG\#V$, con espacio vectorial subyacente $kG \otimes V$, cuya multiplicación cumple que

$$(1 \otimes x_i)(g \otimes x_0) = \chi^i(g) g \otimes x_i \quad \text{para todo } i \text{ y todo } g \in G$$

y

$$(1 \otimes x_i)(1 \otimes x_j) = \begin{cases} 1 \otimes x_{i+j} & \text{si } i+j < n, \\ U \otimes x_{i+j-n} & \text{si } i+j \ge n, \end{cases}$$

si y sólo si

1. $\chi(g) = 1$ para todo $g \in G$ tal que $\lambda_g \neq 0$,
2. $\lambda_{hgh^{-1}} = \chi^n(h)\lambda_g$ para todo $h, g \in G$.

Por la teoría de productos cruzados desarrollada en [**5**], para ello será suficiente verificar que las funciones

$$\Phi\colon V \otimes kG \longrightarrow kG \otimes V \quad \text{y} \quad \mathcal{F}\colon V \otimes V \longrightarrow kG \otimes V,$$

dadas por

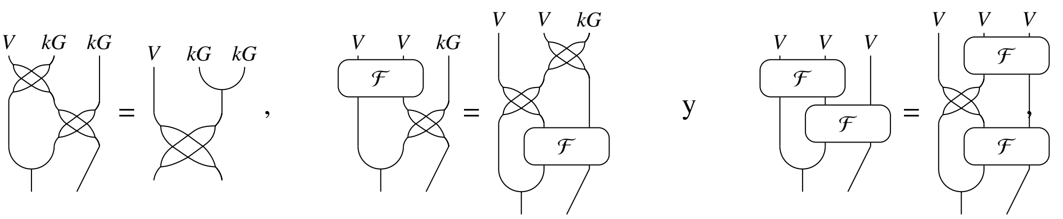
$$\Phi(x_i \otimes g) := \chi^i(g) g \otimes x_i$$

y

$$\mathcal{F}(x_i \otimes x_j) := \begin{cases} 1_G \otimes x_{i+j} & \text{si } i+j < n, \\ U \otimes x_{i+j-n} & \text{si } i+j \ge n, \end{cases}$$

satisfacen que

$$\Phi(x_i \otimes 1_G) = 1 \otimes x_i, \qquad \Phi(x_0 \otimes g) = g \otimes x_0, \qquad \mathcal{F}(x_0 \otimes x_i) = \mathcal{F}(x_i \otimes x_0) = 1_G \otimes x_i,$$



donde el símbolo $\bowtie$ denota a Φ, si y sólo si las condiciones (1) y (2) se satisfacen.

Por las definiciones de Φ and $\mathcal{F}$, las primeras cuatro condiciones se cumplen. Asumamos que las otras también se satisfacen. Evaluando la quinta en $x_1 \otimes x_{n-1} \otimes h$ vemos que

$$\sum_{g\in G} \lambda_g gh \otimes x_0 = \sum_{g\in G} \chi^n(h)\lambda_g hg \otimes x_0 \quad \text{para todo } g, h \in G,$$

o equivalentemente,

$$\lambda_{hgh^{-1}} = \chi^n(h)\lambda_g \quad \text{para todo } g, h \in G,$$

y evaluando la sexta en $x_1 \otimes x_{n-1} \otimes x_1$ tenemos que

$$\chi(g) = 1 \quad \text{para todo } g \in G \text{ con } \lambda_g \neq 0.$$

Recíprocamente, un cálculo directo prueba que si estos hechos son ciertos, entonces se cumplen las igualdades en los últimos dos diagramas. □

Corolario 4.2. *Si hay un álgebra $B_\mathcal{E}$ que satisface las condiciones pedidas en la Proposición 4.1, y existe g en el centro $\mathrm{Z}G$ de G con $\lambda_g \neq 0$, entonces $\chi^n = 1$.*

Observación 4.3. *Es claro que si existe, entonces $B_\mathcal{E}$ es una k-álgebra unitaria con unidad $1_G x^0$, que kG es una subálgebra de $B_\mathcal{E}$ y que $B_\mathcal{E}$ es única salvo isomorfismo.*

Observación 4.4. *Usando que $B_\mathcal{E}$ tiene dimensión $n|G|$ es fácil ver que es canónicamente isomorfa al álgebra generada por el grupo G y el elemento x sujetos a las relaciones $x^n = U$ y $xg = \chi(g)gx$ para todo $g \in G$.*

Por la Observación 4.4 es claro que existe un morfismo de álgebras $\epsilon\colon B_\mathcal{E} \to k$ tal que $\epsilon(x) = 0$ y $\epsilon(g) = 1$ para todo $g \in G$ si y sólo si $\sum_{g\in G} \lambda_g = 0$. Asumamos que éste es el caso. Dado $q \in k^\times$, sea

$$c_q\colon B_\mathcal{E} \otimes B_\mathcal{E} \longrightarrow B_\mathcal{E} \otimes B_\mathcal{E}$$

la función definida por $c_q(gx^i \otimes hx^j) := q^{ij}\, hx^j \otimes gx^i$. Es fácil verificar que c_q es un operador trenzado que es compatible con $1_{B_\mathcal{E}}$ y ϵ. Además, un cálculo directo muestra que c_q es compatible con la multiplicación de $B_\mathcal{E}$ si y sólo si $U = 0$ o $q^n = 1$.

Proposición 4.5. *Sea $\mathcal{E}$ como al comienzo de esta sección, $z \in G$ y $q \in k^\times$. Asumamos que $B_\mathcal{E}$ existe, $(q^n - 1)U = 0$ y $\sum_{g\in G} \lambda_g = 0$. Entonces, el álgebra $B_\mathcal{E}$ es una biálgebra trenzada con trenza c_q y comultiplicación Δ definida por*

$$\Delta(x) := 1 \otimes x + x \otimes z \qquad y \qquad \Delta(g) := g \otimes g \quad para\ g \in G \tag{1.26}$$

si y sólo si $\binom{n}{s}_{q\chi(z)} = 0$ para todo $0 < s < n$, $z \in \mathrm{Z}G$ y $U = \lambda(z^n - 1)$ para algún $\lambda \in k$.

Demostración. Dado que $B_\mathcal{E}$ es generado por el grupo G y el elemento x sujetos a las relaciones $x^n = U$ y $xg = \chi(g)gx$ para todo $g \in G$, existe un morfismo de álgebras

$$\Delta\colon B_\mathcal{E} \longrightarrow B_\mathcal{E} \otimes_{c_q} B_\mathcal{E}$$

tal que (1.26) se cumple si y sólo si las igualdades

$$(h \otimes h)(g \otimes g) = hg \otimes hg,$$
$$(1 \otimes x + x \otimes z)(g \otimes g) = \chi(g)(g \otimes g)(1 \otimes x + x \otimes z)$$

y

$$(1 \otimes x + x \otimes z)^n = \sum_{l\in G} \lambda_l\, l \otimes l \tag{1.27}$$

valen en $B_\mathcal{E} \otimes_{c_q} B_\mathcal{E}$ para todo $h, g \in G$. La primera igualdad es trivial, mientras que la segunda es equivalente a

$$\chi(g)(g \otimes gx + gx \otimes zg) = \chi(g)(g \otimes gx + gx \otimes gz) \qquad \text{para todo } g \in G,$$

y por lo tanto se satisface si y sólo si z está en el centro de G. En cuanto a la última, observemos que, en $B_{\mathcal{E}} \otimes_{c_q} B_{\mathcal{E}}$,

$$(1 \otimes x)(x \otimes z) = q\chi(z)\, x \otimes zx = q\chi(z)(x \otimes z)(1 \otimes x),$$

y así, por la fórmula (3.4),

$$(1 \otimes x + x \otimes z)^n = \sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s}_{q\chi(z)} (x \otimes z)^s (1 \otimes x)^{n-s} = \sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s}_{q\chi(z)} x^s \otimes z^s x^{n-s}.$$

Por lo tanto, la igualdad (1.27) es verdadera si y sólo si

$$\sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s}_{q\chi(z)} x^s \otimes z^s x^{n-s} = \sum_{l \in G} \lambda_l\, l \otimes l,$$

lo cual es claramente equivalente a que

$$\binom{n}{s}_{q\chi(z)} = 0 \quad \text{para todo } 0 < s < n,$$

y

$$\sum_{l \in G} \lambda_l\, l \otimes l = 1 \otimes x^n + x^n \otimes z^n = 1 \otimes U + U \otimes z^n = \sum_{l \in G} 1 \otimes \lambda_l l + \sum_{l \in G} \lambda_l l \otimes z^n.$$

Si $z^n = 1_G$ esto sucede si y sólo si $\lambda_l = 0$ para todo $l \in G$, mientras que si $z^n \neq 1_G$, si y sólo si $\lambda_l = 0$ para todo $l \neq 1_G, z^n$ y $\lambda_{z^n} = -\lambda_{l_G}$. De paso esta cuenta muestra que si Δ existe entonces la aumentación ϵ introducida antes está bien definida. Asumamos ahora que existe un tal morfismo de álgebras Δ. Es fácil ver que Δ es coasociativa y que ϵ es su counidad (alcanza con verificar estos hechos para x y $g \in G$). Además por la fórmula (3.4),

$$\Delta(gx^r) := \sum_{s=0}^{r} \binom{r}{s}_{q\chi(z)} (g \otimes g)(x \otimes z)^s (1 \otimes x)^{r-s} = \sum_{s=0}^{r} \binom{r}{s}_{q\chi(z)} gx^s \otimes gz^s x^{r-s}$$

para todo $g \in G$ y $r \geq 0$. Usando esto es fácil ver que c_q es compatible con Δ, lo que completa la prueba, porque ya sabemos que c_q también es compatible con $1_{B_{\mathcal{E}}}$, la multiplicación de $B_{\mathcal{E}}$ y la función ϵ. □

Observación 4.6. *Es fácil ver que* $\binom{n}{1}_{q\chi(z)} = 0$ *implica que* $(q\chi(z))^n = 1$ *y que si* $q\chi(z)$ *es una raíz n-sima primitiva de la unidad, entonces* $\binom{n}{s}_{q\chi(z)} = 0$ *para todo* $0 < s < n$.

Corolario 4.7. *Cada dato* $\mathcal{D} = (G, \chi, z, \lambda, q)$ *que consiste de:*

- *un grupo finito* G,
- *un caracter* χ *of* G *con valores en* k,
- *un elemento central* z *de* G,
- *elementos* $q \in k^{\times}$ *y* $\lambda \in k$,

tales que

- $q\chi(z)$ *es una raíz de* 1 *de orden n mayor que* 1,
- *si* $\lambda(z^n - 1) \neq 0$, *entonces* $\chi^n = 1$ *y* $q^n = 1$,

tiene asociado un álgebra de Hopf trenzada $H_{\mathcal{D}}$. *Como álgebra,* $H_{\mathcal{D}}$ *es generada por el grupo* G *y el elemento* x *sujetos a las relaciones*

$$x^n = \lambda(z^n - 1) \quad y \quad xg = \chi(g)gx \quad \text{para todo } g \in G,$$

la estructura de coálgebra de $H_{\mathcal{D}}$ *está determinada por*

$$\Delta(g) := g \otimes g \ \ \text{para } g \in G, \qquad \Delta(x) := 1 \otimes x + x \otimes z,$$

$$\epsilon(g) := 1 \quad para\ g \in G, \qquad\qquad \epsilon(x) := 0,$$

la trenza c_q de $H_{\mathcal{D}}$ está definida por

$$c_q(gx^i \otimes hx^j) := q^{ij}\, hx^j \otimes gx^i,$$

y su antípoda está dada por

$$S(gx^i) := (-1)^i (q\chi(z))^{\frac{i(i-1)}{2}} x^i z^{-i} g^{-1}. \tag{1.28}$$

Además, como espacio vectorial $H_{\mathcal{D}}$ tiene base

$$\{gx^i : g \in G \text{ y } 0 \le i < n\},$$

y por lo tanto, $\dim(H_{\mathcal{D}}) = n|G|$.

Demostración. Sean $\mathcal{E} := (G, \chi, \lambda(z^n - 1), n)$ y $B_{\mathcal{E}}$ el álgebra obtenida aplicando la Proposición 4.1. Por la Proposición 4.5, sabemos que $B_{\mathcal{E}}$ tiene una estructura de biálgebra trenzada con comultiplicación, counidad y trenza como en el enunciado. Denotemos con $H_{\mathcal{D}}$ a esta biálgebra. Resta verificar que la función S dada por (1.28) es la antípoda de $H_{\mathcal{D}}$. Puesto que

$$S \circ \mu(gx^i \otimes hx^j) = \mu \circ (S \otimes S) \circ c_q(gx^i \otimes hx^j),$$

para ello será suficiente verificar que

$$S(x) + xS(z) = S(1)x + S(x)z = 0 \qquad \text{y} \qquad S(g)g = gS(g) = 1 \quad \text{para todo } g \in G,$$

lo cual es evidente. □

Observación 4.8. *Si $\lambda(z^n - 1) = 0$, podemos asumir sin pérdida de generalidad (y lo haremos), que $\lambda = 0$.*

Observación 4.9. *Asumamos que $n > 1$. El corolario anterior también vale si la hipótesis de que $q\chi(z)$ es una raíz de 1 de orden n es reemplazada por $\binom{n}{s}_{q\chi(z)} = 0$ para todo $0 < s < n$ y si n es par, entonces $q\chi(z)^{n/2} = -1$. A pesar de esto, de ahora en más consideramos que $q\chi(z)$ es una raíz de orden n de 1.*

2. $H_{\mathcal{D}}$-comódulo álgebras a derecha

De aquí en adelante $\mathcal{D} := (G, \chi, z, \lambda, q)$ y $H_{\mathcal{D}}$ son como en el Corolario 4.7 y utilizaremos libremente las notaciones y propiedades allí establecidas. Además, para abreviar expresiones escribimos $p := \chi(z)$. Comenzamos ahora con el estudio de los $H_{\mathcal{D}}$-comódulo álgebras trenzadas a derecha. Sea $\mathrm{Aut}_{\chi,z}(G)$ el subgrupo de $\mathrm{Aut}(G)$ que consiste de todos los automorfismos ϕ tales que $\phi(z) = z$ y $\chi \circ \phi = \chi$.

Proposición 4.10. *Si $(p, q) \neq (1, -1)$, entonces para todo $H_{\mathcal{D}}$-espacio trenzado a izquierda (V, s) es cierto que*

$$s(kG \otimes V) = V \otimes kG,$$
$$s(z \otimes v) = v \otimes z \quad para\ todo\ v \in V,$$

y existe $\alpha \in \mathrm{Aut}(V)$ tal que

$$s(x \otimes v) = \alpha(v) \otimes x \quad para\ todo\ v \in V. \tag{2.29}$$

Demostración. Escribamos

$$s(gx^i \otimes v) = \sum_{\substack{h \in G \\ 0 \le j < n}} \beta_{g,i}^{h,j}(v) \otimes hx^j.$$

Puesto que $S^2(gx^i) = q^{i(i-1)}p^{-i}gx^i$, tenemos que

$$
\begin{aligned}
q^{i(i-1)}p^{-i} \sum_{\substack{h\in G\\ 0\le j<n}} \beta_{g,i}^{h,j}(v)\otimes hx^j &= q^{i(i-1)}p^{-i}s(gx^i\otimes v)\\
&= s\circ (S^2\otimes V)(gx^i\otimes v)\\
&= (V\otimes S^2)\circ s(gx^i\otimes v)\\
&= \sum_{\substack{h\in G\\ 0\le j<n}} \beta_{g,i}^{h,j}(v)\otimes S^2(hx^j)\\
&= \sum_{\substack{h\in G\\ 0\le j<n}} q^{j(j-1)}p^{-j}\beta_{g,i}^{h,j}(v)\otimes hx^j,
\end{aligned}
$$

y por lo tanto,

$$
\beta_{g,i}^{h,j}\neq 0 \Longrightarrow q^{j(j-1)-i(i-1)} = p^{j-i}. \tag{2.30}
$$

Usando ahora que s es compatible con Δ, obtenemos que

$$
\begin{aligned}
\sum_{\substack{h\in G\\ 0\le j<n}} \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i}_{qp} \beta_{g,0}^{h,j}(v)\otimes hx^i\otimes hz^i x^{j-i} &= (V\otimes\Delta)\circ s(g\otimes v)\\
&= (s\otimes H_{\mathfrak{D}})\circ (H_{\mathfrak{D}}\otimes s)\circ(\Delta\otimes V)(g\otimes v) \qquad (2.31)\\
&= \sum_{\substack{h\in G\\ 0\le i<n}} \sum_{\substack{h'\in G\\ 0\le i'<n}} \beta_{g,0}^{h,i}\circ\beta_{g,0}^{h',i'}(v)\otimes hx^i\otimes h'x^{i'}.
\end{aligned}
$$

Por ello,

$$
\beta_{g,0}^{h,i}\circ\beta_{g,0}^{h',i'} = \begin{cases} \binom{i+i'}{i}_{qp}\beta_{g,0}^{h,i+i'} & \text{si } h' = hz^i \text{ y } i+i'<n,\\ 0 & \text{de otro modo.}\end{cases} \tag{2.32}
$$

Combinando esto con (2.30) obtenemos que

$$
\beta_{g,0}^{h,j}\neq 0 \Longrightarrow \beta_{g,0}^{h,i}\neq 0 \text{ para todo } i\le j \implies q^{i(i-1)} = p^i \text{ para } i\le j.
$$

En consecuencia, si $\beta_{g,0}^{h,j}\neq 0$ para algún $g\in G$ y $j\ge 1$, entonces $p = q^0 = 1$. Por lo tanto si $p\neq 1$, entonces $\beta_{g,0}^{h,j} = 0$ para todo $g\in G$ y $j\ge 1$. Asumamos que $p=1$. Si $\beta_{g,0}^{h,j}\neq 0$ para algún $g\in G$ y $j\ge 2$, entonces $q^2 = p^2 = 1$. Pero esto es una contradicción, dado que implica que $n := \mathrm{ord}(qp) = \mathrm{ord}(q)\le 2$ and $j<n$. De modo que

$$
s(g\otimes v) = \begin{cases} \sum_{h\in G}\beta_{g,0}^{h,0}(v)\otimes h & \text{si } p\neq 1,\\ \sum_{h\in G}\beta_{g,0}^{h,0}(v)\otimes h + \sum_{h\in G}\beta_{g,0}^{h,1}(v)\otimes hx & \text{si } p=1.\end{cases} \tag{2.33}
$$

Por otro lado, debido a que s es compatible con la counidad, se tiene que

$$
\sum_{h\in G}\beta_{g,0}^{h,0} = \mathrm{id} \quad \text{para todo } g\in G,
$$

lo cual, combinando con el caso particular de (2.32) obtenido tomando $i = i' = 0$, muestra que

$$
(\beta_{g,0}^{h,0})_{h\in G} \text{ es una familia completa de idempotentes ortogonales } g\in G. \tag{2.34}
$$

La igualdad (2.33) muestra que si $p \neq 1$, entonces $s(kG \otimes V) \subseteq V \otimes kG$. Asumamos ahora que $p = 1$ y $q \neq -1$. Usando que s es compatible con la multiplicación de $H_{\mathfrak{D}}$ obtenemos que

$$\begin{aligned}
v \otimes 1 &= s(g^{-1}g \otimes v)\\
&= (v \otimes \mu) \circ (s \otimes H_{\mathfrak{D}}) \circ (H_{\mathfrak{D}} \otimes s)(g^{-1} \otimes g \otimes v)\\
&= \sum_{h\in G}\sum_{l\in G} \beta^{h,0}_{g^{-1},0} \circ \beta^{l,0}_{g,0}(v) \otimes hl + \sum_{h\in G}\sum_{l\in G} \chi(l)\beta^{h,1}_{g^{-1},0} \circ \beta^{l,0}_{g,0}(v) \otimes hlx\\
&+ \sum_{h\in G}\sum_{l\in G} \beta^{h,0}_{g^{-1},0} \circ \beta^{l,1}_{g,0}(v) \otimes hlx + \sum_{h\in G}\sum_{l\in G} \chi(l)\beta^{h,1}_{g^{-1},0} \circ \beta^{l,1}_{g,0}(v) \otimes hlx^2.
\end{aligned} \tag{2.35}$$

En consecuencia

$$\sum_{h\in G} \beta^{h^{-1},0}_{g^{-1},0} \circ \beta^{h,0}_{g,0} = \mathrm{id}_V,$$

lo cual por (2.34) implica que

$$\beta^{h^{-1},0}_{g^{-1},0}(v) = v \quad \text{para todo } v \in \mathrm{Im}(\beta^{h,0}_{g,0}) \text{ y } h, g \in G.$$

Dado que $(\beta^{h,0}_{g,0})_{h\in G}$ y $(\beta^{h,0}_{g^{-1},0})_{h\in G}$ son familias completas de idempotentes ortogonales, de esto se sigue que

$$\beta^{h^{-1},0}_{g^{-1},0} = \beta^{h,0}_{g,0} \quad \text{para todo } h, g \in G.$$

Combinando esto con (2.35), concluimos que

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{h\in G}\sum_{l\in G} \chi(l)\beta^{h,1}_{g^{-1},0} \circ \beta^{l,0}_{g,0}(v) \otimes hlx + \sum_{h\in G}\sum_{l\in G} \beta^{h,0}_{g^{-1},0} \circ \beta^{l,1}_{g,0}(v) \otimes hlx\\
&= \sum_{h\in G}\sum_{l\in G} \chi(l)\beta^{h,1}_{g^{-1},0} \circ \beta^{l^{-1},0}_{g^{-1},0}(v) \otimes hlx + \sum_{h\in G}\sum_{l\in G} \beta^{h^{-1},0}_{g,0} \circ \beta^{l,1}_{g,0}(v) \otimes hlx\\
&= \sum_{h\in G} \chi(z^{-1}h^{-1})\beta^{h,1}_{g^{-1},0}(v) \otimes z^{-1}x + \sum_{h\in G} \beta^{h,1}_{g,0}(v) \otimes x,
\end{aligned} \tag{2.36}$$

donde la última igualdad se sigue del hecho de que por (2.32)

$$\beta^{h,1}_{g,0} \circ \beta^{h',0}_{g,0} = \begin{cases} \beta^{h,1}_{g,0} & \text{si } h' = hz,\\ 0 & \text{de otro modo,}\end{cases} \quad \text{y} \quad \beta^{h,0}_{g,0} \circ \beta^{h',1}_{g,0} = \begin{cases} \beta^{h,1}_{g,0} & \text{si } h' = h,\\ 0 & \text{de otro modo.}\end{cases} \tag{2.37}$$

Observemos que por (2.34) y la segunda igualdad en (2.37), las imágenes de las funciones $\beta^{h,1}_{g,0}$ están en suma directa para cada $g \in G$. Por ello, a partir de (2.36) se sigue que si $z \neq 1$, entonces $\beta^{h,1}_{g,0} = 0$ para todo $g, h \in G$, por lo cual por la igualdad (2.33) implica que $s(kG \otimes V) \subseteq V \otimes kG$. Asumimos ahora además que $z = 1$. Entonces $\mathrm{Prim}(H_{\mathfrak{D}}) = kx$ y así, por Proposición 2.7 existe un automorfismo α de V tal que

$$s(x \otimes v) = \alpha(v) \otimes x \quad \text{para todo } v \in V.$$

Además, por la compatibilidad de s con c_q,

$$\begin{aligned}
\sum_{h\in G} \beta^{h,0}_{g,0} \circ \alpha(v) \otimes x \otimes h + q\sum_{h\in G} \beta^{h,1}_{g,0} \circ \alpha(v) \otimes x \otimes hx\\
&= (V \otimes c_q) \circ (s \otimes H_{\mathfrak{D}}) \circ (H_{\mathfrak{D}} \otimes s)(g \otimes x \otimes v)\\
&= (s \otimes H_{\mathfrak{D}}) \circ (H_{\mathfrak{D}} \otimes s) \circ (c_q \otimes V)(g \otimes x \otimes v)\\
&= \sum_{h\in G} \alpha \circ \beta^{h,0}_{g,0}(v) \otimes x \otimes h + \sum_{h\in G} \alpha \circ \beta^{h,1}_{g,0}(v) \otimes x \otimes hx
\end{aligned}$$

para todo $g \in G$, y entonces

$$\alpha \circ \beta^{h,0}_{g,0} = \beta^{h,0}_{g,0} \circ \alpha \quad \text{y} \quad \alpha \circ \beta^{h,1}_{g,0} = q\beta^{h,1}_{g,0} \circ \alpha \quad \text{para todo } h, g \in G. \tag{2.38}$$

Usando ahora que s es compatible con la multiplicación de $H_{\mathfrak{D}}$, obntenemos que

$$\begin{aligned}\chi(g)\sum_{h\in G}\beta_{g,0}^{h,0}\circ\alpha(v)\otimes hx+\chi(g)\sum_{h\in G}\beta_{g,0}^{h,1}\circ\alpha(v)\otimes hx^2 &\\ &= (V\otimes\mu)\circ(s\otimes H_{\mathfrak{D}})\circ(H_{\mathfrak{D}}\otimes s)(\chi(g)g\otimes x\otimes v)\\ &= (s\otimes H_{\mathfrak{D}})\circ(H_{\mathfrak{D}}\otimes s)\circ(\mu\otimes V)(\chi(g)g\otimes x\otimes v)\\ &= (s\otimes H_{\mathfrak{D}})\circ(H_{\mathfrak{D}}\otimes s)\circ(\mu\otimes V)(x\otimes g\otimes v)\\ &= (V\otimes\mu)\circ(s\otimes H_{\mathfrak{D}})\circ(H_{\mathfrak{D}}\otimes s)(x\otimes g\otimes v)\\ &= \sum_{h\in G}\chi(h)\,\alpha\circ\beta_{g,0}^{h,0}(v)\otimes hx+\sum_{h\in G}\chi(h)\,\alpha\circ\beta_{g,0}^{h,1}\otimes hx^2\end{aligned}$$

para todo $g\in G$, lo cual combinado con (2.38) da

$$\chi(g)\beta_{g,0}^{h,0}\circ\alpha=\chi(h)\,\alpha\circ\beta_{g,0}^{h,0}=\chi(h)\beta_{g,0}^{h,0}\circ\alpha \tag{2.39}$$

y

$$\chi(g)\beta_{g,0}^{h,1}\circ\alpha=\chi(h)\,\alpha\circ\beta_{g,0}^{h,1}=\chi(h)q\beta_{g,0}^{h,1}\circ\alpha \tag{2.40}$$

para todo $g,h\in G$. Dado que α es biyectiva, de (2.39) se sigue que si $\beta_{g,0}^{h,0}\neq 0$, entonces $\chi(g)=\chi(h)$. Combinando esto con (2.37), vemos que $\beta_{g,0}^{h,1}\neq 0\Rightarrow\beta_{g,0}^{h,0}\neq 0\Rightarrow\chi(g)=\chi(h)$. Por lo tanto de (2.40) se sigue que si existen $g,h\in G$ tal que $\beta_{g,0}^{h,1}\neq 0$, entonces $q=1$, lo cual es falso. Por ello, $\beta_{g,0}^{h,1}=0$ para todo $g,h\in G$. Esto concluye la prueba de que $s(kG\otimes V)\subseteq V\otimes kG$. Una cuenta similar, con s reemplazado por s^{-1}, muestra que $s(kG\otimes V)\supseteq V\otimes kG$, y entonces la igualdad es verdadera.

Ahora volvemos al caso general y afirmamos que

1. $\beta_{1,1}^{h,j}=0$ para todo $h\in G$ y $j\geq 2$,
2. $\beta_{1,1}^{h,1}=0$ para $h\neq 1$,
3. $\beta_{1,1}^{1,1}$ es biyectiva,
4. $\beta_{z,0}^{z,0}=\mathrm{id}$ y $\beta_{z,0}^{h,0}=0$ para $h\neq z$,
5. $\beta_{1,1}^{h,0}=0$ para $h\notin\{1,z\}$,
6. Si $z\neq 1$, entonces $\beta_{1,1}^{z,0}=-\beta_{1,1}^{1,0}$ mientras que si $z=1$, entonces $\beta_{1,1}^{1,0}=0$,

En efecto, $s(kG\otimes V)\subseteq V\otimes kG$ significa que $\beta_{g,0}^{h,j}=0$ para todo $g,h\in G$ y $j>0$. Por lo tanto, por la compatibilidad de s con Δ,

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{h\in G\\0\leq j<n}}\sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i}_{qp}\beta_{1,1}^{h,j}(v)\otimes hx^i\otimes hz^ix^{j-i} = (V\otimes\Delta)\circ s(x\otimes v)&\\ &= (s\otimes H_{\mathfrak{D}})\circ(H_{\mathfrak{D}}\otimes s)\circ(\Delta\otimes V)(x\otimes v)\\ &= \sum_{\substack{h\in G\\0\leq j<n}}\beta_{1,1}^{h,j}(v)\otimes 1\otimes hx^j\\ &+\sum_{\substack{h,l\in G\\0\leq j<n}}\beta_{1,1}^{l,j}\circ\beta_{z,0}^{h,0}(v)\otimes lx^j\otimes h.\end{aligned} \tag{2.41}$$

Esto implica que los ítems (1) y (2) son verdaderos y que

(8) $\beta_{1,1}^{1,1} = \beta_{1,1}^{1,1} \circ \beta_{z,0}^{z,0}$ y $\beta_{1,1}^{1,1} \circ \beta_{z,0}^{h,0} = 0$ para todo $h \in G \setminus \{z\}$,

(9) $\beta_{1,1}^{h,0} = \beta_{1,1}^{h,0} \circ \beta_{z,0}^{h,0}$ y $\beta_{1,1}^{h,0} = -\beta_{1,1}^{1,0} \circ \beta_{z,0}^{h,0}$ para todo $h \in G \setminus \{1\}$,

(10) $\beta_{1,1}^{h,0} \circ \beta_{z,0}^{1,0} = 0$ para todo $h \in G$.

Por los ítems (1) y (2) y la condición (2.30),

$$s(x \otimes v) = \begin{cases} \beta_{1,1}^{1,1}(v) \otimes x & \text{si } p \neq 1, \\ \beta_{1,1}^{1,1}(v) \otimes x + \sum_{h \in G} \beta_{1,1}^{h,0}(v) \otimes h & \text{si } p = 1. \end{cases} \tag{2.42}$$

Esto inmediatamente implica que $\beta_{1,1}^{1,1}$ es inyectiva. En efecto, si $\beta_{1,1}^{1,1}(v) = 0$, entonces

$$s(x \otimes v) \in s(kG \otimes V),$$

y por ello $v = 0$, dado que $s\colon H_{\mathcal{D}} \otimes V \to V \otimes H_{\mathcal{D}}$ es inyectiva. El ítem (4) se sigue del ítem (8) y la inyectividad de $\beta_{1,1}^{1,1}$. En consecuencia, por el ítem (9), tenemos que

$$\beta_{1,1}^{h,0} = \beta_{1,1}^{h,0} \circ \beta_{z,0}^{h,0} = 0 \quad \text{para todo } h \in G \setminus \{1, z\},$$

lo que prueba que vale el ítem (5). Observemos también que por los ítems (4), (9) y (10),

$$\beta_{1,1}^{z,0} = \begin{cases} -\beta_{1,1}^{1,0} \circ \beta_{z,0}^{z,0} = -\beta_{1,1}^{1,0} & \text{si } z \neq 1, \\ \beta_{1,1}^{1,0} \circ \beta_{1,0}^{1,0} = 0 & \text{si } z = 1, \end{cases}$$

lo cual prueba que también vale el ítem (6). Combinando el ítem (4) con el hecho de que $\beta_{z,0}^{h,j} = 0$ para todo $h \in G$ y $j > 0$, s deduce que

$$s(z \otimes v) = v \otimes z \qquad \text{para todo } v \in V.$$

Además, por los ítems (5) y (6), la igualdad (2.42) se convierte en

$$s(x \otimes v) = \begin{cases} \beta_{1,1}^{1,1}(v) \otimes x & \text{si } p \neq 1 \text{ o } z = 1, \\ \beta_{1,1}^{1,1}(v) \otimes x + \beta_{1,1}^{1,0}(v) \otimes 1 - \beta_{1,1}^{1,0}(v) \otimes z & \text{de otro modo.} \end{cases} \tag{2.43}$$

Ahora probemos que si $p = 1$ y $q \neq -1$, entonces $\beta_{1,1}^{1,0} = 0$. Si $z = 1$ esto ya ha sido verificado. Asumimos ahora que $z \neq 1$. Para abreviar expresiones escribimos $\alpha := \beta_{1,1}^{1,1}$ y $\beta := \beta_{1,1}^{1,0}$. Evaluando

$$(s \otimes H_{\mathcal{D}}) \circ (H_{\mathcal{D}} \otimes s) \circ (c_q \otimes V) \qquad \text{y} \qquad (V \otimes c_q) \circ (s \otimes H_{\mathcal{D}}) \circ (H_{\mathcal{D}} \otimes s)$$

en $x \otimes x \otimes v$ para todo $v \in V$, y usando (2.43) y que estas funciones coinciden, vemos que

$$q\beta \circ \alpha = \alpha \circ \beta \quad \text{y} \quad q\alpha \circ \beta = \beta \circ \alpha.$$

Entonces $q^2 \alpha \circ \beta = \alpha \circ \beta$, y así $\beta = 0$, dado que $q^2 \neq 1$ y α es inyectiva. por ende (2.43) se convierte en

$$s(x \otimes v) = \alpha(v) \otimes v \quad \text{para todo } v \in V.$$

Así $s(x \otimes V) \subseteq V \otimes x$ y un cálculo similar con s reemplazado por s^{-1} muestra que $s(x \otimes V) \supseteq V \otimes x$, lo que inmediatamente prueba que α es una función sobreyectiva. □

En el resto del capítulo asumimos que $(p, q) \neq (1, -1)$.

Proposición 4.11. *Sea V un k-espacio vectorial. Dada una $\mathrm{Aut}_{\chi,z}(G)$-graduación*

$$V = \bigoplus_{\zeta \in \mathrm{Aut}_{\chi,z}(G)} V_\zeta$$

de V y un automorfismo $\alpha\colon V \to V$ que satisface:

- *$\alpha(V_\zeta) = V_\zeta$ para todo $\zeta \in \mathrm{Aut}_{\chi,z}(G)$,*

- $\alpha^n = \mathrm{id}$ *si* $\lambda(z^n - 1) \neq 0$,

el par (V, s)*, donde* $s\colon H_{\mathfrak{D}} \otimes V \longrightarrow V \otimes H_{\mathfrak{D}}$ *es la función definida por*

$$s(gx^m \otimes v) := \alpha^m(v) \otimes \zeta(g)x^m \qquad \textit{para todo } v \in V_\zeta, \tag{2.44}$$

es un $H_{\mathfrak{D}}$*-espacio trenzado a izquierda. Además, todos los* $H_{\mathfrak{D}}$*-espacios trenzados a izquierda con* k*-espacio vectorial subyacente* V *tienen esta forma.*

Demostración. Es fácil verificar que la función s definida por (2.44) es compatible con la unidad, la counidad, la multiplicación y la trenza de $H_{\mathfrak{D}}$. Así, por la Observación 2.1, para verificar que s es una transposición a izquierda es suficiente verificar que

$$(s \otimes H_{\mathfrak{D}}) \circ (H_{\mathfrak{D}} \otimes s) \circ (\Delta \otimes V)(x \otimes v) = (V \otimes \Delta) \circ s(x \otimes v)$$

y

$$(s \otimes H_{\mathfrak{D}}) \circ (H_{\mathfrak{D}} \otimes s) \circ (\Delta \otimes V)(g \otimes v) = (V \otimes \Delta) \circ s(g \otimes v) \quad \text{for } g \in G,$$

lo cual es evidente.

Recíprocamente, asumamos que (V, s) es un $H_{\mathfrak{D}}$-espacio trenzado a izquierda. Por la Proposición 4.10 y el Teorema 2.16, sabemos que existe una automorfismo α de V y una graduación

$$V = \bigoplus_{\zeta \in \mathrm{Aut}(G)} V_\zeta$$

tal que

$$s(g \otimes v) = v \otimes \zeta(g) \quad \text{y} \quad s(x \otimes v) = \alpha(v) \otimes x \quad \text{para todo } g \in G \text{ and } v \in V_\zeta.$$

De nuevo por la Proposición 4.10, sabemos también que

$$s(z \otimes v) = v \otimes z \quad \text{para todo } v \in V.$$

Además, si $V_\zeta \neq 0$, entonces $\zeta(z) = z$. Sea $g \in G$ y $v \in V_\zeta \setminus \{0\}$. Un cálculo directo muestra que

$$\begin{aligned} \alpha(v) \otimes x\zeta(g) &= s(xg \otimes v) \\ &= s(\chi(g)gx \otimes v) \\ &= \sum_{\phi \in \mathrm{Aut}(G)} \alpha(v)_\phi \otimes \chi(g)\phi(g)x \\ &= \sum_{\phi \in \mathrm{Aut}(G)} \alpha(v)_\phi \otimes \chi(g)\chi(\phi(g))^{-1} x\phi(g). \end{aligned}$$

Dado que g es arbitrario, de esto se sigue que $\alpha(v)_\phi = 0$ para $\phi \neq \zeta$. Así

$$\alpha(V_\zeta) = V_\zeta \quad \text{y} \quad \chi \circ \zeta = \chi.$$

Finalmente, supongamos que $\lambda(z^n - 1) \neq 0$. Entonces

$$v \otimes \lambda(z^n - 1) = s(\lambda(z^n - 1) \otimes v) = s(x^n \otimes v) = \alpha^n(v) \otimes x^n = \alpha^n(v) \otimes \lambda(z^n - 1)$$

para cada $v \in V$, lo que muestra que $\alpha^n = \mathrm{id}$ y completa la demostración. □

Nuestro próximo objetivo es caracterizar las estructuras de $H_{\mathfrak{D}}$-comódulos trenzados. Sea (V, s) un $H_{\mathfrak{D}}$-espacio trenzado a izquierda y sean

$$V = \bigoplus_{\zeta \in \mathrm{Aut}_{\chi,z}(G)} V_\zeta \qquad \text{y} \qquad \alpha\colon V \to V$$

la descomposición y el automorfismo asociados a la transposición a izquierda s. Cada función

$$\nu\colon V \longrightarrow V \otimes H_{\mathfrak{D}}$$

determina y es determinada por una familia de funciones

$$U_m^g : V \to V \qquad (g \in G, 0 \le m < n), \tag{2.45}$$

vía

$$\nu(v) := \sum_{\substack{g \in G \\ 0 \le m < n}} U_m^g(v) \otimes gx^m. \tag{2.46}$$

PROPOSICIÓN 4.12. *El par (V, s) es un $H_{\mathcal{D}}$-comódulo a derecha vía ν si y sólo si*

1. $U_i^g(V_\zeta) \subseteq V_\zeta$ *para todo* $g \in G$, $\zeta \in \mathrm{Aut}_{\chi,z}(G)$ *y* $i \in \{0,1\}$,
2. $(U_0^g)_{g \in G}$ *es una familia completa de idempotentes ortogonales,*
3. $U_1^g = U_0^g \circ U_1^g = U_1^g \circ U_0^{gz}$ *para todo* $g \in G$,
4. $U_j^g = \frac{1}{(j)!_{qp}} U_1^g \circ U_1^{gz} \circ \cdots \circ U_1^{gz^{j-1}}$ *para todo* $g \in G$ *y* $1 \le j < n$,
5. $U_1^g \circ U_1^{gz} \circ \cdots \circ U_1^{gz^{n-1}} = 0$ *para todo* $g \in G$,
6. $\alpha \circ U_0^g = U_0^g \circ \alpha$ *y* $q\,\alpha \circ U_1^g = U_1^g \circ \alpha$ *para todo* $g \in G$.

DEMOSTRACIÓN. Para cada $v \in V$, $h \in G$ y $0 \le l < n$, escribamos

$$U_l^h(v) = \sum_{\phi \in \mathrm{Aut}_{\chi,z}(G)} U_l^h(v)_\phi \qquad \text{con } U_l^h(v)_\phi \in V_\phi.$$

Dado que

$$(\nu \otimes H_{\mathcal{D}}) \circ s(gx^m \otimes v) = \sum_{\substack{h \in G \\ 0 \le l < n}} U_l^h(\alpha^m(v)) \otimes hx^l \otimes \zeta(g)x^m$$

y

$$(V \otimes c_q) \circ (s \otimes H_{\mathcal{D}}) \circ (H_{\mathcal{D}} \otimes \nu)(gx^m \otimes v) = \sum_{\substack{h \in G \\ 0 \le l < n}} \sum_{\phi \in \mathrm{Aut}_{\chi,z}(G)} q^{lm}\, \alpha^m(U_l^h(v)_\phi) \otimes hx^l \otimes \phi(g)x^m,$$

la función ν satisface la condición (2.11) en la Observación 2.27 si y sólo si

$$\sum_{\substack{h \in G \\ 0 \le l < n}} U_l^h(\alpha^m(v)) \otimes hx^l \otimes \zeta(g)x^m = \sum_{\substack{h \in G \\ 0 \le l < n}} \sum_{\phi \in \mathrm{Aut}_{\chi,z}(G)} q^{lm}\, \alpha^m(U_l^h(v)_\phi) \otimes hx^l \otimes \phi(g)x^m,$$

para todo $\zeta \in \mathrm{Aut}_{\chi,z}(G)$, $v \in V_\zeta$, $g \in G$ y $0 \le m < n$. Puesto que ζ, v y g son arbitarios, $\alpha(V_\phi) = V_\phi$ para todo $\phi \in \mathrm{Aut}_{\chi,z}(G)$, y α es biyectiva, esto se cumple si y sólo si

$$U_l^h(V_\zeta) \subseteq V_\zeta \quad \text{y} \quad q^l\, \alpha \circ U_l^h = U_l^h \circ \alpha, \tag{2.47}$$

para todo h, l, y ζ. Por otro lado, dado que $\epsilon(gx^i) = \delta_{0i}$, la función ν es counitaria si y sólo si

$$\sum_{g \in G} U_0^g = \mathrm{id}, \tag{2.48}$$

y dado que

$$(V \otimes \Delta) \circ \nu(v) = \sum_{\substack{g \in G \\ 0 \le m < n}} U_m^g(v) \otimes \Delta(gx^m) = \sum_{\substack{g \in G \\ 0 \le m < n}} \sum_{l=0}^{m} \binom{m}{l}_{qp} U_m^g(v) \otimes gx^l \otimes gz^l x^{m-l}$$

y

$$(\nu \otimes H_{\mathcal{D}}) \circ \nu(v) = \sum_{\substack{h \in G \\ 0 \le r < n}} \nu(U_r^h(v)) \otimes hx^r = \sum_{\substack{h \in G \\ 0 \le r < n}} \sum_{\substack{g \in G \\ 0 \le l < n}} U_l^g(U_r^h(v)) \otimes gx^l \otimes hx^r,$$

es coasocativa si y sólo si

$$U_l^g \circ U_r^h = \begin{cases} \binom{l+r}{l}_{qp} U_{l+r}^g & \text{si } h = gz^l \text{ y } l + r < n, \\ 0 & \text{de otro modo.} \end{cases} \tag{2.49}$$

Por lo tanto, para probar esta proposición debemos probar que los ítems (1)–(6) son equivalentes a las condiciones (2.47), (2.48) y (2.49). Es evidente que (2.47) implica la validez de los ítems (1) and (6), mientras que los ítems (2) y (3) se siguen de (2.48) y (2.49). Finalmente, usando (2.49) de nuevo es fácil probar por inducción sobre j que los ítems (4) y (5) también se cumplen Recíprocamente, asumamos que las funciones U_i^g satisfacen los ítems (1)–(6). Es evidente que el ítem (2) implica la validez de la igualdad (2.49). Afirmamos que

$$U_s^f \circ U_r^{fz^s} = \begin{cases} \binom{r+s}{s}_{qp} U_{s+r}^f & \text{si } s + r < n, \\ 0 & \text{si } s + r \geq n. \end{cases} \tag{2.50}$$

Por el ítem (2) esto es cierto si $r = s = 0$. Para verificarlo cuando $r > 0$ y $s = 0$ o $r = 0$ y $s > 0$, es suficiente notar que por los ítems (3) y (4),

$$U_0^f \circ U_s^f = \frac{1}{(s)!_{qp}} U_0^f \circ U_1^f \circ \cdots \circ U_1^{fz^{s-1}} = \frac{1}{(s)!_{qp}} U_1^f \circ \cdots \circ U_1^{fz^{s-1}} = U_s^f$$

y

$$U_s^f \circ U_0^{fz^s} = \frac{1}{(s)!_{qp}} U_1^f \circ \cdots \circ U_1^{fz^{s-1}} \circ U_0^{fz^s} = \frac{1}{(s)!_{qp}} U_1^f \circ \cdots \circ U_1^{fz^{s-1}} = U_s^f,$$

respectivamente. Asumamos ahora que $r > 0$ y $s > 0$. Entonces, por el ítem (4),

$$U_s^f \circ U_r^{fz^s} = \frac{1}{(s)!_{qp}} \frac{1}{(r)!_{qp}} U_1^f \circ \cdots \circ U_1^{fz^{s-1}} \circ U_1^{fz^s} \circ \cdots \circ U_1^{fz^{s+r-1}},$$

y la afirmación se sigue inmediatamente a partir de los ítems (4) and (5). Observemos ahora que (2.50) implica que

$$U_s^f \circ U_r^h = U_s^f \circ U_0^{fz^s} \circ U_0^h \circ U_r^h$$

lo cual, combinado con el ítem (2), prueba que

$$U_s^f \circ U_r^h = 0 \quad \text{si } h \neq fz^s,$$

finalizando la demostración de (2.49). □

Corolario 4.13. *Sea V un k-espacio vectorial. Cada dato consistente de*

- *una $G \times \mathrm{Aut}_{\chi,z}(G)$-graduación $V = \bigoplus_{(g,\zeta)\in G\times \mathrm{Aut}_{\chi,z}(G)} V_{g,\zeta}$ de V,*
- *un automorfismo $\alpha\colon V \to V$ tal que*

$$\alpha^n = \mathrm{id} \text{ si } \lambda(z^n - 1) \neq 0 \quad y \quad \alpha(V_{g,\zeta}) = V_{g,\zeta} \text{ para todo } (g,\zeta),$$

- *una función $U\colon V \to V$, tal que*

$$U \circ \alpha = q\,\alpha \circ U, \quad U^n = 0 \quad y \quad U(V_{g,\zeta}) \subseteq V_{gz^{-1},\zeta} \text{ para todo } (g,\zeta),$$

determina unívocamente un $H_{\mathfrak{D}}$-comódulo a derecha (V, s), en el cual

- *$s\colon H_{\mathfrak{D}} \otimes V \longrightarrow V \otimes H_{\mathfrak{D}}$ es la transposición a izquierda $H_{\mathfrak{D}}$ sobre V asociada como en* (2.44) *con la función α y la $\mathrm{Aut}_{\chi,z}(G)$-graduación de V*

$$V = \bigoplus_{\zeta\in \mathrm{Aut}_{\chi,z}(G)} V_\zeta, \qquad \text{donde } V_\zeta := \bigoplus_{g\in G} V_{g,\zeta},$$

- *la coacción $\nu\colon V \to V \otimes H_{\mathfrak{D}}$ de (V, s) está definida por*

$$\nu(v) := \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{(j)!_{qp}} U^j(v) \otimes z^{-j} g x^j \qquad \textit{para todo } v \in V_g,$$

donde, para todo $g \in G$,

$$V_g := \bigoplus_{\zeta \in \mathrm{Aut}_{\chi,z}(G)} V_{g,\zeta}.$$

Además, todos los $H_{\mathfrak{D}}$-comódulos trenzados a derecha con k-espacio vectorial subyacente V tienen esta forma.

Demostración. Asumamos que tenemos un dato como en el enunciado. Entonces definimos una familia de funciones como en (2.45), por

- $U_0^g(v) := \pi_g(v)$, donde $\pi_g\colon V \to V_g$ es la proyección sobre V_g en $\bigoplus_{h \in G\setminus\{g\}} V_h$,
- $U_1^g := U_0^g \circ U \circ U_0^{gz}$,
- $U_j^g = \frac{1}{(j)!_{qp}} U_1^g \circ U_1^{gz} \circ \cdots \circ U_1^{gz^{j-1}}$ para todo $1 < j < n$.

Debemos verificar que estas funciones satisfacen las condiciones pedidas en la Proposición 4.12. El ítem (1) se cumple porque

$$U(V_\zeta) \subseteq V_\zeta \quad \text{y} \quad U_0^g(V_\zeta) \subseteq V_\zeta \quad \text{para todo } g \in G,$$

los ítems (2)–(4) valen por la definición de las funciones U_i^g, y el ítem (6) se cumple porque

$$\alpha(V_{g,\zeta}) = V_{g,\zeta} \quad \text{para todo } (g, \zeta)$$

y

$$U \circ \alpha = q\,\alpha \circ U.$$

Probaremos ahora que vale el ítem (5). Como $U^n = 0$, esto se seguirá trivialmente si probamos que

$$U_1^g \circ U_1^{gz} \circ \cdots \circ U_1^{gz^{j-1}}(v) = \begin{cases} U^j(v) & \text{si } v \in V_{gz^j,\zeta}, \\ 0 & \text{si } v \in V_{h,\zeta} \text{ con } h \neq gz^j. \end{cases}$$

Claramente si $v \in V_{h,\zeta}$ con $h \neq gz^j$, entonces $U_0^{gz^j}(v) = 0$, y así

$$U_1^g \circ U_1^{gz} \circ \cdots \circ U_1^{gz^{j-1}}(v) = U_1^g \circ \cdots \circ U_1^{gz^{j-1}} \circ U_0^{gz^j}(v) = 0.$$

Resta considerar el caso en que $v \in V_{gz^j,\zeta}$. Procederemos por inducción sobre j. Si $j = 1$, entonces

$$U_1^g(v) = U_0^g \circ U \circ U_0^{gz}(v) = U_0^g \circ U(v) = U(v),$$

porque $U(v) \in V_{g,\zeta}$. Asumamos que $j > 1$ y que el resultado es cierto para $j - 1$. Entonces

$$U_1^g \circ U_1^{gz} \circ \cdots \circ U_1^{gz^{j-1}}(v) = U_1^g \circ \cdots \circ U_1^{gz^{j-2}} \circ U_1^{gz^{j-1}}(v) = U_1^g \circ \cdots \circ U_1^{gz^{j-2}} \circ U(v) = U^j(v),$$

donde la última igualdad se sigue de la hipótesis inductiva y del hecho de que $U(v) \in V_{gz^{j-1},\zeta}$.

Recíprocamente, asumamos que (V, s) es un $H_{\mathfrak{D}}$-comódulo a derecha vía $\nu\colon V \to V \otimes H_{\mathfrak{D}}$. Sean

$$V = \bigoplus_{\zeta \in \mathrm{Aut}_{\chi,z}(G)} V_\zeta \qquad \text{y} \qquad \alpha\colon V \to V$$

la descomposición y el automorfismo asociado a s. Por los ítems (1) y (2) de la Proposición 4.12, sabemos que para cada $\zeta \in \mathrm{Aut}_{\chi,z}(G)$, las funciones U_0^g's determinan por restricción una familia completa $(U_0^g\colon V_\zeta \to V_\zeta)_{g\in G}$ de idempotentes ortogonales. Sea

$$V_\zeta = \bigoplus_{g\in G} V_{g,\zeta}$$

la descomposición asociada a esta familia. Claramente

$$V = \bigoplus_{(g,\zeta)\in G\times \mathrm{Aut}_{\chi,z}(G)} V_{g,\zeta}.$$

Por el ítem (6) de la Proposición 4.12, tenemos que $\alpha \circ U_0^g = U_0^g \circ \alpha$ para todo $g \in G$. Dado que, por la Proposición 4.11 sabemos que $\alpha(V_\zeta) = V_\zeta$ para todo $\zeta \in \mathrm{Aut}(G)$, esto implica que

$$\alpha(V_{g,\zeta}) = V_{g,\zeta} \qquad \text{para todo } (g,\zeta).$$

Definimos ahora una función $U\colon V \to V$ por

$$U(v) = U_1^g(v) \qquad \text{para todo } v \in V_{gz}.$$

Por los ítems (3) y (5) de la Proposición 4.12, se sigue que $U^n = 0$, y utilizando la segunda igualdad en el ítem (6) de la misma proposición, obtenemos que $\alpha \circ U = q\, U \circ \alpha$. Finalmente, por los ítems (1) y (3) de la Proposición 4.12, tenemos que $U(V_{g,\zeta}) \subseteq V_{z^{-1}g,\zeta}$ para todo (g,ζ).

Dejamos al lector la tarea de probar que la construcción dada en las dos partes de esta prueba son recíprocas una de la otra. □

Corolario 4.14. *Con las notaciones del corolario anterior,* $V^{coH} = V_{1_G} \cap \ker(U)$.

Demostración. Esto es una consecuencia inmediata del Corolario 4.13. □

Proposición 4.15. *Sea B un álgebra. Si*

$$B = \bigoplus_{\zeta\in \mathrm{Aut}_{\chi,z}(G)^{\mathrm{op}}} B_\zeta \tag{2.51}$$

es una $\mathrm{Aut}_{\chi,z}(G)^{\mathrm{op}}$*-graduación de B como álgebra y $\alpha\colon B \to B$ un automorfismo de álgebras que satisface*

- $\alpha(B_\zeta) = B_\zeta$ *para todo* $\zeta \in \mathrm{Aut}_{\chi,z}(G)$,
- $\alpha^n = \mathrm{id}$ *si* $\lambda(z^n - 1) \neq 0$,

entonces la función $s\colon H_{\mathfrak{D}} \otimes B \longrightarrow B \otimes H_{\mathfrak{D}}$, dada por

$$s(gx^m \otimes b) = \alpha^m(b) \otimes \zeta(g)x^m \quad \textit{para todo } b \in B_\zeta, \tag{2.52}$$

es una transposición a izquierda de $H_{\mathfrak{D}}$ sobre el álgebra B. Además, todas las transposiciones de $H_{\mathfrak{D}}$ sobre B tienen esta forma.

Demostración. Por la Proposición 4.11 para probar esto es suficiente verificar que la fórmula (2.52) define una función compatible con la unidad y la multiplicación de B si y sólo si (2.51) es una graduación de B como álgebra y α es un automorfismo de álgebras. Dejamos esta tarea al lector. □

El grupo $\mathrm{Aut}_{\chi,z}(G)$ actúa sobre G^{op} vía $\zeta \cdot g := \zeta(g)$. Por lo tanto tiene sentido considerar el producto semidirecto $G(\chi,z) := G^{\mathrm{op}} \ltimes \mathrm{Aut}_{\chi,z}(G)$.

Definición 4.16. *Sean $\mathcal{D} = (G, \chi, z, \lambda, q)$ como en el Corolario 4.7 y B un álgebra provista de un automorfismo de álgebras $\alpha\colon B \to B$, una función $U\colon B \to B$ y una $G(\chi, z)^{\mathrm{op}}$-graduación*

$$B = \bigoplus_{(g,\zeta)\in G(\chi,z)^{\mathrm{op}}} B_{g,\zeta}, \tag{2.53}$$

de B como espacio vectorial. Decimos que (2.53) *es una graduación de B* compatible con $\mathcal{D}$ *si alguna de las siguientes condiciones se satisfacen:*

1. $\lambda(z^n - 1) = 0$ *y* (2.53) *es una graduación de B como álgebra.*
2. $\lambda(z^n - 1) \neq 0$, $1_B \in B_{1_G,\mathrm{id}}$,

$$B_{g,\zeta}B_{h,\phi} \subseteq B_{\phi(g)h,\phi\circ\zeta} \oplus B_{z^{-n}\phi(g)h,\phi\circ\zeta} \quad \textit{para todo } (g,\zeta),(h,\phi) \in G(\chi,z)^{\mathrm{op}}, \tag{2.54}$$

y para cada $b \in B_{g,\zeta}$ y $c \in B_{h,\phi}$, la componente homogénea $(bc)_{z^{-n}\phi(g)h,\phi\circ\zeta}$ de bc de grado

$$(z^{-n}\phi(g)h, \phi\circ\zeta)$$

está dada por

$$(bc)_{z^{-n}\phi(g)h,\phi\circ\zeta} := -\lambda \sum_{r=1}^{n-1} \frac{p^{r^2}\chi(h)^r}{(r)!_{qp}(n-r)!_{qp}} U^r(b)\alpha^r(U^{n-r}(c)). \tag{2.55}$$

Teorema 4.17. *Sea B un álgebra. Cada dato consistente de*

- *una $G(\chi, z)^{\mathrm{op}}$-graduación*

$$B = \bigoplus_{(g,\zeta)\in G(\chi,z)^{\mathrm{op}}} B_{g,\zeta}, \tag{2.56}$$

- *un automorfismo de álgebras $\alpha\colon B \to B$ de B tal que*

$$\alpha^n = \mathrm{id} \textit{ si } \lambda(z^n-1) \neq 0 \quad \textit{y} \quad \alpha(B_{g,\zeta}) = B_{g,\zeta} \textit{ para todo } (g,\zeta),$$

- *una función $U\colon B \to B$ tal que*

la graduación (2.56) *es compatible con $\mathcal{D}$,*

$$U\circ\alpha = q\,\alpha\circ U,$$

$$U^n = 0,$$

$$U(B_{g,\zeta}) \subseteq B_{z^{-1}g,\zeta} \quad \textit{para todo } (g,\zeta)$$

y

$$U(bc) = bU(c) + \chi(h)U(b)\alpha(c) \quad \textit{para todo } b \in B \textit{ y } c \in B_h, \tag{2.57}$$

donde

$$B_h := \bigoplus_{\zeta\in\mathrm{Aut}_{\chi,z}(G)} B_{h,\zeta} \quad \textit{para todo } h \in G,$$

determina un $H_{\mathcal{D}}$-comódulo álgebra a derecha (B, s), en el cual $s\colon H_{\mathcal{D}} \otimes B \longrightarrow B \otimes H_{\mathcal{D}}$ es la transposición a izquierda de $H_{\mathcal{D}}$ en B asociada a la función α y a la $\mathrm{Aut}_{\chi,z}(G)^{\mathrm{op}}$-graduación de B

$$B = \bigoplus_{\zeta\in\mathrm{Aut}_{\chi,z}(G)^{\mathrm{op}}} B_\zeta, \quad \textit{where } B_\zeta := \bigoplus_{g\in G} B_{g,\zeta}. \tag{2.58}$$

La coacción $\nu\colon B \to B \otimes H_{\mathcal{D}}$ de (B, s) está dada por

$$\nu(b) := \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{(j)!_{qp}} U^j(b) \otimes z^{-j}gx^j \qquad \textit{para todo } b \in B_g. \tag{2.59}$$

Además, todos las estructuras de $H_{\mathcal{D}}$-comódulo álgebras trenzadas a derecha con álgebra subyacente B se obtienen de este modo.

Demostración. Sea (B, s) un $H_{\mathcal{D}}$-comódulo a derecha, con s una transposición a izquierda de $H_{\mathcal{D}}$ sobre el álgebra B. Consideremos los subespacios $B_{g,\zeta}$ de B y las funciones α y U asociadas a (B, s) como en el Corolario 4.13. Por tal corolario, la Proposición 4.15, y las Observaciones 2.27 y 2.37, para completar la demostración será suficiente mostrar que la coacción ν de (B, s) satisface

$$\nu(1_B) = 1_B \otimes 1_{H_{\mathcal{D}}} \quad \text{y} \quad \nu \circ \mu_B = (\mu_B \otimes \mu_{H_{\mathcal{D}}}) \circ (B \otimes s \otimes H_{\mathcal{D}}) \circ (\nu \otimes \nu) \tag{2.60}$$

si y sólo si la descomposición

$$B = \bigoplus_{(g,\zeta)\in G(\chi,z)^{\mathrm{op}}} B_{g,\zeta} \tag{2.61}$$

es compatible con la $\mathcal{D}$ graduación de B y U satisface la condición (2.57). Primero hacemos algunas observaciones. Sean $b \in B_{g,\zeta}$ y $c \in B_{h,\phi}$. Por la definición de ν,

$$\nu(bc) = \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{f\in G} \frac{1}{(l)!_{qp}} U^l((bc)_f) \otimes z^{-l} f x^l. \tag{2.62}$$

Por otro lado, un cálculo directo muestra que

$$\begin{aligned} F(b,c) &= \sum_{r=0}^{n-1}\sum_{s=0}^{n-1} \frac{p^{-sr}\chi(h)^r}{(r)!_{qp}(s)!_{qp}} U^r(b)\alpha^r(U^s(c)) \otimes z^{-r-s}\phi(g)hx^{r+s} \\ &= \sum_{u=0}^{2n-2} \sum_{\substack{r=0\\ 0\le u-r<n}}^{n-1} \frac{p^{-(u-r)r}\chi(h)^r}{(r)!_{qp}(u-r)!_{qp}} U^r(b)\alpha^r(U^{u-r}(c)) \otimes z^{-u}\phi(g)hx^u, \end{aligned} \tag{2.63}$$

donde para abreviar expresiones escribimos

$$F(b,c) := (\mu_B \otimes \mu_{H_{\mathcal{D}}}) \circ (B \otimes s \otimes H_{\mathcal{D}})(\nu(b) \otimes \nu(c)).$$

A continuación ponemos

$$A_u^r(b,c) := \frac{p^{(r-u)r}\chi(h)^r}{(r)!_{qp}(u-r)!_{qp}} U^r(b)\alpha^r(U^{u-r}(c)).$$

Puesto que $x^n = \lambda(z^n - 1)$, la igualdad (2.63) se transforma en

$$\begin{aligned} F(b,c) &= \sum_{l=0}^{n-1}\sum_{r=0}^{l} A_l^r(b,c) \otimes z^{-l}\phi(g)hx^l + \lambda \sum_{l=0}^{n-1}\sum_{r=l+1}^{n-1} A_{l+n}^r(b,c) \otimes z^{-n-l}\phi(g)h(z^n-1)x^l \\ &= \sum_{l=0}^{n-1}\Big(\sum_{r=0}^{l} A_l^r(b,c) + \lambda \sum_{r=l+1}^{n-1} A_{l+n}^r(b,c)\Big) \otimes z^{-l}\phi(g)hx^l \\ &- \sum_{l=0}^{n-1}\sum_{r=l+1}^{n-1} \lambda A_{l+n}^r(b,c) \otimes z^{-n-l}\phi(g)hx^l. \end{aligned} \tag{2.64}$$

Primero vamos a probar la parte $\Rightarrow$). Asumamos que $\lambda(z^n-1) \neq 0$ y dejamos el caso $\lambda(z^n-1) = 0$, que es más sencillo, al lector. Para comenzar notemos que por la primera igualdad en (2.60),

$$1_B \in B_{1_G} = \bigoplus_{\zeta\in \mathrm{Aut}_{\chi,z}(G)} B_{1_G,\zeta}.$$

Dado que, por otra parte, (2.58) es una graduación de A como álgebra, necesariamente

$$1_B \in B_{\mathrm{id}} = \bigoplus_{g\in G} B_{g,\mathrm{id}},$$

y así $1_B \in B_{1_G,\mathrm{id}}$. Recordemos que $b \in B_{g,\zeta}$ y $c \in B_{h,\phi}$. Dado que por la segunda igualdad en (2.60), las ecuaciones (2.62) y (2.64) coinciden, tenemos que

$$(bc)_f = \begin{cases} A_0^0(b,c) + \lambda \sum_{r=1}^{n-1} A_n^r(b,c) & \text{si } f = \phi(g)h, \\ -\lambda \sum_{r=1}^{n-1} A_n^r(b,c) & \text{si } f = z^{-n}\phi(g)h, \\ 0 & \text{de otro modo,} \end{cases} \tag{2.65}$$

y

$$U((bc)_f) = \begin{cases} \sum_{r=0}^{1} A_1^r(b,c) + \lambda \sum_{r=2}^{n-1} A_{1+n}^r(b,c) & \text{si } f = \phi(g)h, \\ -\lambda \sum_{r=2}^{n-1} A_{1+n}^r(b,c) & \text{si } f = z^{-n}\phi(g)h, \\ 0 & \text{de otro modo.} \end{cases} \tag{2.66}$$

Dado que, por la Proposición 4.15, sabemos que $bc \in B_{\phi\circ\zeta}$, a partir de la igualdad (2.65) se sigue fácilmente que la graduación (2.56) es compatible con $\mathcal{D}$ (recordemos que si $\lambda(z^n - 1) \neq 0$, entonces $p^n = 1$). Finalmente, por (2.66)

$$\begin{aligned} U(bc) &= \sum_f U((bc)_f) \\ &= \sum_{r=0}^{1} A_1^r(b,c) + \lambda \sum_{r=2}^{n-1} A_{1+n}^r(b,c) - \lambda \sum_{r=2}^{n-1} A_{1+n}^r(b,c) \\ &= A_1^0(b,c) + A_1^1(b,c). \end{aligned}$$

Por lo tanto (2.57) es verdadera.

Probemos ahora la parte $\Leftarrow$). Asumimos que (2.61) es compatible con $\mathcal{D}$ y que U satisface (2.57). Nuevamente consideremos el caso $\lambda(z^n - 1) \neq 0$ y dejamos el caso $\lambda(z^n - 1) = 0$, que es más sencillo, al lector. Para comenzar observemos que $\nu(1_B) = 1_B \otimes 1_{H_{\mathcal{D}}}$, puesto que

$$1_B \in B_{1_G} \qquad \text{y} \qquad U(1_B) = 1_B U(1_B) + U(1_B)1_B \Rightarrow U(1_B) = 0.$$

Por lo tanto, todo se reduce a probar que la segunda condición en (2.60) se satisface. Por las igualdades (2.62) y (2.64), esto es equivalente a probar que para todo $0 \leq l < n$ y $f \in G$,

$$\frac{1}{(l)!_{qp}} U^l((bc)_f) = \begin{cases} \sum_{r=0}^{l} A_l^r(b,c) + \lambda \sum_{r=l+1}^{n-1} A_{l+n}^r(b,c) & \text{si } f = \phi(g)h, \\ -\lambda \sum_{r=l+1}^{n-1} A_{l+n}^r(b,c) & \text{si } f = z^{-n}\phi(g)h, \\ 0 & \text{de otro modo.} \end{cases} \tag{2.67}$$

Para $l = 0$ esto se sigue fácilmente a partir del hecho de que la igualdad (2.55) es verdadera y

$$bc = (bc)_{\phi(g)h,\phi\circ\zeta} + (bc)_{z^{-n}\phi(g)h,\phi\circ\zeta},$$

puesto que (2.61) es compatible con $\mathcal{D}$. Asumamos por hipótesis inductiva que la igualdad (2.55) es verdadera para l y que $l < n-1$. Esto implica que

$$\frac{1}{(l)!_{qp}} U^{l+1}((bc)_f) = \begin{cases} \sum_{r=0}^{l} U(A_l^r(b,c)) + \lambda \sum_{r=l+1}^{n-1} U(A_{l+n}^r(b,c)) & \text{si } f = \phi(g)h, \\ -\lambda \sum_{r=l+1}^{n-1} U(A_{l+n}^r(b,c)) & \text{si } f = z^{-n}\phi(g)h, \\ 0 & \text{de otro modo.} \end{cases}$$

Por lo tanto debemos probar que

$$\frac{1}{(l+1)_{qp}} \sum_{r=l+1}^{n-1} U(A_{l+n}^r(b,c)) = \sum_{r=l+2}^{n-1} A_{l+1+n}^r(b,c) \tag{2.68}$$

y

$$\frac{1}{(l+1)_{qp}} \sum_{r=0}^{l} U(A_l^r(b,c)) = \sum_{r=0}^{l+1} A_{l+1}^r(b,c). \tag{2.69}$$

Usando (2.57) y los hechos de que $\alpha \circ U = qU \circ \alpha$ y $p^n = 1$, obtenemos que

$$\begin{aligned} U(A_l^r(b,c)) &= \frac{p^{(r-l)r}\chi(h)^r}{(r)!_{qp}(l-r)!_{qp}} U(U^r(b)\alpha^r(U^{l-r}(c))) \\ &= \frac{p^{(r-l)r}\chi(h)^r}{(r)!_{qp}(l-r)!_{qp}} \big(q^r U^r(b)\alpha^r(U^{l+1-r}(c)) + p^{r-l}\chi(h)U^{r+1}(b)\alpha^{r+1}(U^{l-r}(c))\big). \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} U(A_{l+n}^r(b,c)) &= \frac{p^{(r-l)r}\chi(h)^r}{(r)!_{qp}(l+n-r)!_{qp}} U(U^r(b)\alpha^r(U^{l+n-r}(c))) \\ &= \frac{p^{(r-l)r}\chi(h)^r}{(r)!_{qp}(l+n-r)!_{qp}} \big(q^r U^r(b)\alpha^r(U^{l+1+n-r}(c)) + p^{r-l}\chi(h)U^{r+1}(b)\alpha^{r+1}(U^{l+n-r}(c))\big). \end{aligned}$$

Dado que $U^n = 0$, esto implica que

$$\begin{aligned} \sum_{r=0}^{l} U(A_l^r(b,c)) &= \sum_{r=0}^{l} \frac{p^{(r-l)r}\chi(h)^r q^r}{(r)!_{qp}(l-r)!_{qp}} U^r(b)\alpha^r(U^{l+1-r}(c)) \\ &\quad + \sum_{r=0}^{l} \frac{p^{(r-l)(r+1)}\chi(h)^{r+1}}{(r)!_{qp}(l-r)!_{qp}} U^{r+1}(b)\alpha^{r+1}(U^{l-r}(c))\big) \\ &= \sum_{r=0}^{l} \frac{p^{(r-l)r}\chi(h)^r q^r}{(r)!_{qp}(l-r)!_{qp}} U^r(b)\alpha^r(U^{l+1-r}(c)) \\ &\quad + \sum_{r=1}^{l+1} \frac{p^{(r-l-1)r}\chi(h)^r}{(r-1)!_{qp}(l+1-r)!_{qp}} U^r(b)\alpha^r(U^{l+1-r}(c)) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \sum_{r=l+1}^{n-1} U(A_{l+n}^r(b,c)) &= \sum_{r=l+2}^{n-1} \frac{p^{(r-l)r}\chi(h)^r q^r}{(r)!_{qp}(l+n-r)!_{qp}} U^r(b)\alpha^r(U^{l+1+n-r}(c)) \\ &\quad + \sum_{r=l+1}^{n-2} \frac{p^{(r-l)(r+1)}\chi(h)^{r+1}}{(r)!_{qp}(l+n-r)!_{qp}} U^{r+1}(b)\alpha^{r+1}(U^{l+n-r}(c))\big) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{r=l+2}^{n-1} \frac{p^{(r-l)r}\chi(h)^r q^r}{(r)!_{qp}(l+n-r)!_{qp}} U^r(b)\alpha^r(U^{l+1+n-r}(c))\\
&+ \sum_{r=l+2}^{n-1} \frac{p^{(r-l-1)r}\chi(h)^r}{(r-1)!_{qp}(l+1+n-r)!_{qp}} U^r(b)\alpha^r(U^{l+1+n-r}(c)).
\end{aligned}
$$

Por lo tanto para completar la demostración de las igualdades (2.68) y (2.69) es suficiente comprobar que

$$
\begin{aligned}
&\frac{(l+1)_{qp}}{(l+1)!_{qp}} = \frac{1}{(l)!_{qp}},\\
&\frac{(l+1)_{qp}\chi(h)^{l+1}}{(l+1)!_{qp}} = \frac{\chi(h)^{l+1}}{(l)!_{qp}},\\
&\frac{(l+1)_{qp}p^{(r-l-1)r}\chi(h)^r}{(r)!_{qp}(l+1-r)!_{qp}} = \frac{p^{(r-l)r}\chi(h)^r q^r}{(r)!_{qp}(l-r)!_{qp}} + \frac{p^{(r-l-1)r}\chi(h)^r}{(r-1)!_{qp}(l+1-r)!_{qp}} \qquad \text{para } 1 \le r \le l
\end{aligned}
$$

y

$$
\begin{aligned}
\frac{(l+1)_{qp}p^{(r-l-1)r}\chi(h)^r}{(r)!_{qp}(l+1+n-r)!_{qp}} &= \frac{p^{(r-l)r}\chi(h)^r q^r}{(r)!_{qp}(l+n-r)!_{qp}}\\
&+ \frac{p^{(r-l-1)r}\chi(h)^r}{(r-1)!_{qp}(l+1+n-r)!_{qp}} \qquad \text{para } l+2 \le r < n.
\end{aligned}
$$

Pero las dos primeras igualdades son triviales y las últimas equivalen a

$$
(l+1)_{qp}p^{(r-l-1)r} = p^{(r-l)r}q^r(l+1-r)_{qp} + p^{(r-l-1)r}(r)_{qp} \qquad \text{para } 1 \le r \le l
$$

y

$$
(l+1)_{qp}p^{(r-l-1)r} = p^{(r-l)r}q^r(l+1+n-r)_{qp} + p^{(r-l-1)r}(r)_{qp} \qquad \text{para } l+2 \le r < n,
$$

y es fácil verificar que estas igualdades son verdaderas. □

Observación 4.18. *Sean (B,s) un $H_{\mathfrak{D}}$-comódulo álgebra a derecha y $B_G := \{b \in B : \nu(b) \in B \otimes kG\}$. Observemos que*

$$
B_G = \ker(U) = \bigoplus_{(g,\zeta)\in G(\chi,z)^{\mathrm{op}}} B_{g,\zeta} \cap \ker(U).
$$

Además,

$$
\nu(B_G) \subseteq B_G \otimes kG,
$$

porque $(B \otimes \Delta) \circ \nu = (\nu \otimes H_{\mathfrak{D}}) \circ \nu$. Por lo tanto, dado que

$$
(B \otimes c_q) \circ (s \otimes H_{\mathfrak{D}}) \circ (H_{\mathfrak{D}} \otimes \nu) = (\nu \otimes H_{\mathfrak{D}}) \circ s,
$$

tenemos que $s(H_{\mathfrak{D}} \otimes B_G) \subseteq B_G \otimes H_{\mathfrak{D}}$. Análogamente $s^{-1}(B_G \otimes H_{\mathfrak{D}}) \subseteq H_{\mathfrak{D}} \otimes B_G$, y por ende,

$$
s(H_{\mathfrak{D}} \otimes B_G) = B_G \otimes H_{\mathfrak{D}}.
$$

Asimismo B_G es una subálgebra de B puesto que

$$
\nu \circ \mu = (\mu_B \otimes \mu_{H_{\mathfrak{D}}}) \circ (B \otimes s \otimes H_{\mathfrak{D}}) \circ (\nu \otimes \nu).
$$

Claramente s induce por restricción una transposición a izquierda $\tilde{s}$ de kG sobre B_G. De los comentarios anteriores se sigue que $(B_G, \tilde{s})$ es un kG-comódulo álgebra a derecha.

3. $H_{\mathfrak{D}}$ extensiones cleft

A lo largo de esta sección utilizaremos libremente las notaciones introducidas en la Sección 2 y la caracterización de $H_{\mathfrak{D}}$-comódulo álgebras a derecha obtenidas en el Teorema 4.17. Sean (B,s) un $H_{\mathfrak{D}}$-comódulo álgebra a derecha y $C := B^{coH_{\mathfrak{D}}}$. Recordemos que, por el Corolario 4.14,

$$C = B_{1_G} \cap \ker(U) = \bigoplus_{\zeta \in \mathrm{Aut}_{\chi,z}(G)} B_{1_G,\zeta} \cap \ker(U).$$

Teorema 4.19. *La extensión $(C \hookrightarrow B, s)$ es cleft si y sólo si existen $b_x \in B$ y una familia $(b_g)_{g\in G}$ de elementos de $B^\times$, tales que*

(a) $b_g \in B_{g,\mathrm{id}} \cap \ker(U)$ *para todo* $g \in G$,

(b) $b_x \in B_{z,\mathrm{id}} \cap U^{-1}(1)$,

(c) $\alpha(b_x) = qb_x$,

(d) $\alpha(b_g) = b_g$ *para todo* $g \in G$.

Si éste es el caso, la función $\tilde{\gamma}\colon H_{\mathfrak{D}} \to B$, definida por $\tilde{\gamma}(gx^i) := b_g b_x^i$, es una función cleft, y su inversa respecto de la convolución está dada por

$$\tilde{\gamma}^{-1}(gx^i) = (-1)^i (qp)^{\frac{i(i-1)}{2}} b_x^i b_{gz^i}^{-1}.$$

Demostración. Asumamos que $(C \hookrightarrow B, s)$ es una extensión cleft y fijemos una función cleft $\gamma\colon H_{\mathfrak{D}} \to B$ tal que $\gamma(1) = 1$. Para cada $g \in G$ y $0 \le i < n$, sea $b_{gx^i} := \gamma(gx^i)$. Puesto que γ es un morfismo de comódulos a derecha

$$\nu(b_x) = 1 \otimes x + b_x \otimes z \quad \text{y} \quad \nu(b_g) = b_g \otimes g,$$

lo cual, por la fórmula (2.59), implica que

$$b_g \in B_g \cap \ker(U) \quad \text{y} \qquad b_x \in B_z \cap U^{-1}(1).$$

Además b_g es inversible para cada $g \in G$, dado que γ es inversible respecto de la convolución. Por otro lado, evaluando la igualdad

$$(\gamma \otimes H_{\mathfrak{D}}) \circ c_q = s \circ (H_{\mathfrak{D}} \otimes \gamma)$$

en $h \otimes x$, $x \otimes x$, $h \otimes g$ y $x \otimes g$, donde $h \in G$ es arbitrario, se obtiene que

$$b_x \in B_{\mathrm{id}}, \quad \alpha(b_x) = qb_x, \quad b_g \in B_{\mathrm{id}} \quad \text{y} \quad \alpha(b_g) = b_g,$$

para todo $g \in G$. Entonces, los ítems (a)–(d) son verdaderos. Recíprocamente, asumamos que existe $b_x \in B$ y una familia $(b_g)_{g\in G}$ de elementos de $B^\times$ que satisfacen las condiciones (a)–(d). Probaremos que $(C \hookrightarrow B, s)$ es cleft y la función $\tilde{\gamma}\colon H_{\mathfrak{D}} \to B$, definida por $\tilde{\gamma}(gx^i) := b_g b_x^i$, es una función cleft. Primero verifiquemos que

$$\nu \circ \tilde{\gamma}(gx^i) = (\tilde{\gamma} \otimes H_{\mathfrak{D}}) \circ \Delta(gx^i) \quad \text{para todo } g \in G \text{ y } i \ge 0. \tag{3.70}$$

Para $g = 1$ y $i = 0$ es evidente que esto es cierto. Asumamos que lo es para $g = 1$ y i_0. Luego

$$\begin{aligned} \nu \circ \tilde{\gamma}(x^{i_0+1}) &= \nu(\tilde{\gamma}(x^{i_0}) b_x) \\ &= (\mu_B \otimes \mu_{H_{\mathfrak{D}}}) \circ (B \otimes s \otimes H_{\mathfrak{D}})\big(\nu(\tilde{\gamma}(x^{i_0})) \otimes \nu(b_x)\big) \\ &= \sum_{j=0}^{i_0} \binom{i_0}{j}_{qp} (\mu_B \otimes \mu_{H_{\mathfrak{D}}}) \circ (B \otimes s \otimes H_{\mathfrak{D}})(b_x^j \otimes z^j x^{i_0-j} \otimes 1_B \otimes x) \\ &+ \sum_{j=0}^{i_0} \binom{i_0}{j}_{qp} (\mu_B \otimes \mu_{H_{\mathfrak{D}}}) \circ (B \otimes s \otimes H_{\mathfrak{D}})(b_x^j \otimes z^j x^{i_0-j} \otimes b_x \otimes z) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{j=0}^{i_0} \binom{i_0}{j}_{qp} b_x^j \otimes z^j x^{i_0+1-j} + \sum_{j=0}^{i_0} \binom{i_0}{j}_{qp} b_x^j \alpha^{i_0-j}(b_x) \otimes z^j x^{i_0-j} z \\
&= \sum_{j=0}^{i_0} \binom{i_0}{j}_{qp} b_x^j \otimes z^j x^{i_0+1-j} + \sum_{j=1}^{i_0+1} \binom{i_0}{j-1}_{qp} q^{i_0+1-j} p^{i_0+1-j} b_x^j \otimes z^j x^{i_0+1-j} \\
&= \sum_{j=0}^{i_0} \binom{i_0+1}{j}_{qp} b_x^j \otimes z^j x^{i_0+1-j}.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, la igualdad (3.70) es verdadera cuando $g = 1$. Pero entonces

$$
\begin{aligned}
\nu \circ \tilde{\gamma}(gx^i) &= \nu(b_g \tilde{\gamma}(x^i)) \\
&= \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j}_{qp} (\mu_B \otimes \mu_{H_{\mathfrak{D}}}) \circ (B \otimes s \otimes H_{\mathfrak{D}})(b_g \otimes g \otimes b_x^j \otimes z^j x^{i-j}) \\
&= \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j}_{qp} b_g b_x^j \otimes g z^j x^{i-j}.
\end{aligned}
$$

Ahora verifiquemos que $(\tilde{\gamma} \otimes H_{\mathfrak{D}}) \circ c_q = s \circ (H_{\mathfrak{D}} \otimes \tilde{\gamma})$. En efecto,

$$
(\tilde{\gamma} \otimes H_{\mathfrak{D}}) \circ c_q(gx^i \otimes hx^j) = q^{ij} b_h b_x^j \otimes gx^i = s(gx^i \otimes b_h b_x^j) = s \circ (H_{\mathfrak{D}} \otimes \tilde{\gamma})(gx^i \otimes hx^j).
$$

Resta verificar que $\tilde{\gamma}$ es inversible respecto de la convolución. Como notamos en [**14**, Section 3],

$$
\sum_{j=0}^{i} (-1)^j (qp)^{\frac{j(j-1)}{2}} \binom{i}{j}_{qp} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 0, \\ 0 & \text{si } 0 < i < n. \end{cases} \tag{3.71}
$$

Usando eso es fácil probar que $\tilde{\gamma}$ es inversible con

$$
\tilde{\gamma}^{-1}(gx^i) = (-1)^i (qp)^{\frac{i(i-1)}{2}} b_x^i b_{gz^i}^{-1},
$$

lo cual completa la demostración. □

Observación 4.20. *En el teorema anterior podemos suponer que $b_1 = 1$.*

Teorema 4.21. *Asumamos que $(C \hookrightarrow B, s)$ es cleft. Tomemos $b_x \in B$ y una familia $(b_g)_{g\in G}$ de elementos de $B^{\times}$ con $b_1 = 1$, de modo que las condiciones (a)–(d) del Teorema 4.19 se satisfacen. Entonces*

1. *B es un C-módulo a izquierda libre con base $\{b_g b_x^i : g \in G \text{ y } 0 \le i < n\}$.*
2. *Sea $\mathfrak{b} := b_x^n b_z^{|z|-n}$ y para todo $g \in G$, sean $\mathfrak{a}_g := b_g^{|g|}$ y $\mathfrak{c}_g := (b_x b_g - \chi(g) b_g b_x) b_g^{-1} b_z^{-1}$. Entonces $\mathfrak{a}_g \in C^{\times}$, $\mathfrak{c}_g \in C$, y si $x^n = 0$, entonces $\mathfrak{b} \in C$.*
3. *La acción débil de $H_{\mathfrak{D}}$ sobre C asociada a $\tilde{\gamma}$ de acuerdo al ítem (5) del Teorema 2.87, está dada por*
$$
gx^r \rightharpoonup c = \sum_{s=0}^{r} (-1)^s (qp)^{\frac{s(s-1)}{2}} \binom{r}{s}_{qp} b_g b_x^{r-s} \alpha^s(c) b_x^s b_{\zeta(g)z^r}^{-1} \quad \textit{for } c \in B_{1_G,\zeta} \cap \ker(U).
$$
4. *El dos cociclo $\sigma\colon H_{\mathfrak{D}} \otimes H_{\mathfrak{D}} \longrightarrow C$ asociado a $\tilde{\gamma}$ de acuerdo al ítem (5) del Teorema 2.87, está dado por*
$$
\sigma(gx^s \otimes hx^r) = \sum_{\substack{0\le i\le s \\ 0\le j\le r \\ \xi_{ij}<n}} (-1)^{\xi_{ij}} \binom{s}{i}_{qp} \binom{r}{j}_{qp} (qp)^{\frac{\xi_{ij}(\xi_{ij}-1)}{2}+sj-ij} \chi(h)^{s-i} b_g b_x^i b_h b_x^{s+r-i} b_{ghz^{s+r}}^{-1}
$$

$$+\lambda \sum_{\substack{0\le i\le s\\ 0\le j\le r\\ \xi_{ij}\ge n}} (-1)^{\xi^n_{ij}} \binom{s}{i}_{qp} \binom{r}{j}_{qp} (qp)^{\frac{\xi^n_{ij}(\xi^n_{ij}-1)}{2}+sj-ij} \chi(h)^{s-i} b_g b^i_x b_h b^{\xi_{in}}_x b^{-1}_{ghz^{s+r}}$$

$$-\lambda \sum_{\substack{0\le i\le s\\ 0\le j\le r\\ \xi_{ij}\ge n}} (-1)^{\xi^n_{ij}} \binom{s}{i}_{qp} \binom{r}{j}_{qp} (qp)^{\frac{\xi^n_{ij}(\xi^n_{ij}-1)}{2}+sj-ij} \chi(h)^{s-i} b_g b^i_x b_h b^{\xi_{in}}_x b^{-1}_{ghz^{s+r-n}},$$

where $\xi_{ab} := s+r-a-b$ *and* $\xi^n_{ab} := \xi_{ab}-n$.

Demostración. (1) Por el ítem (4) del Teorema 2.87, la función

$$\phi\colon C\otimes H_{\mathfrak{D}} \longrightarrow B,$$

definida por $\phi(c\otimes y) := c\tilde{\gamma}(y)$, es una base normal. El ítem (1) es una consecuencia inmediata de este hecho.
(2) Usando el ítem (4) de la Proposición 2.37 es fácil comprobar por inducción que

$$\nu(b^r_g) = b^r_g\otimes g^r \quad \text{y} \quad \nu(b^r_x) = \sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i}_{qp} b^i_x\otimes z^i x^{r-i} \quad \text{para todo } g\in G \text{ y } r\ge 0.$$

Como $\binom{n}{i}_{qp} = 0$ cuando $0<i<n$, esto implica que

$$\nu(\mathfrak{a}_g) = \mathfrak{a}_g\otimes 1 \quad \text{para todo } g\in G \quad \text{y} \quad \nu(b^n_x) = 1\otimes x^n + b^n_x\otimes z^n.$$

Además,

$$\begin{aligned}\nu(b_x b_g) &= (\mu_B\otimes\mu_{H_{\mathfrak{D}}})\circ(B\otimes s\otimes H_{\mathfrak{D}})(1\otimes x\otimes b_g\otimes g + b_x\otimes z\otimes b_g\otimes g)\\ &= (\mu_B\otimes\mu_{H_{\mathfrak{D}}})(1\otimes b_g\otimes x\otimes g + b_x\otimes b_z\otimes z\otimes g)\\ &= \chi(g)\, b_g\otimes gx + b_x b_g\otimes zg\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\nu(\chi(g)\, b_g b_x) &= (\mu_B\otimes\mu_{H_{\mathfrak{D}}})\circ(B\otimes s\otimes H_{\mathfrak{D}})(\chi(g)\, b_g\otimes g\otimes 1\otimes x + \chi(g)\, b_g\otimes g\otimes b_x\otimes z)\\ &= (\mu_B\otimes\mu_{H_{\mathfrak{D}}})(\chi(g)\, b_g\otimes 1\otimes g\otimes x + \chi(g)\, b_g\otimes b_x\otimes g\otimes z)\\ &= \chi(g)\, b_g\otimes gx + \chi(g)\, b_g b_x\otimes zg,\end{aligned}$$

para todo $g\in G$. El ítem (2) es una consecuencia inmediata de estos hechos.
(3) Esto se sigue por un cálculo directo utilizando el ítem (5) del Teorema 2.87.
(4) También se sigue a partir de un cálculo directo utilizando el ítem (5) del Teorema 2.87. □

La Proposición 4.23 de abajo es útil para simplificar el cálculo de la primer suma en el lado derecho de la igualdad en el Teorema 4.21(4).

Lema 4.22. *Con las notaciones del resultado anterior, tenemos*

$$\sum_{j=0}^{r}(-1)^{\xi_{ij}}\binom{r}{j}_{qp}(qp)^{\frac{\xi_{ij}(\xi_{ij}-1)}{2}+sj-ij} = \begin{cases}(-1)^{s-i}(qp)^{\frac{(s-i)(s-i-1)}{2}} & \textit{if } r=0,\\ 0 & \textit{if } 0<r<n.\end{cases}$$

Demostración. Sea $a := s-i$ y $b := r-j$. Puesto que $\xi_{ij} = a+b$, tenemos

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{r}(-1)^{\xi_{ij}}\binom{r}{j}_{qp}(qp)^{\frac{\xi_{ij}(\xi_{ij}-1)}{2}+sj-ij} &= \sum_{b=0}^{r}(-1)^{a+b}\binom{r}{b}_{qp}(qp)^{\frac{(a+b)(a+b-1)}{2}+ar-ab}\\ &= (-1)^a(qp)^{ar+\frac{a(a-1)}{2}}\sum_{b=0}^{r}(-1)^b\binom{r}{b}_{qp}(qp)^{\frac{b(b-1)}{2}},\end{aligned}$$

que combinado con (3.71) da el resultado deseado. □

Proposición 4.23. *Sean $r, s, i \geq 0$ con $0 \leq i \leq s$. Los siguientes hechos valen:*

1. *Si $r = 0$, entonces*

$$\sum_{\substack{0\leq j\leq r\\ \xi_{ij}<n}} (-1)^{\xi_{ij}} \binom{r}{j}_{qp} (qp)^{\frac{\xi_{ij}(\xi_{ij}-1)}{2}+sj-ij} = (-1)^{s-i}(qp)^{\frac{(s-i)(s-i-1)}{2}}.$$

2. *Si $r > 0$, entonces*

$$\sum_{\substack{0\leq j\leq r\\ \xi_{ij}<n}} (-1)^{\xi_{ij}} \binom{r}{j}_{qp} (qp)^{\frac{\xi_{ij}(\xi_{ij}-1)}{2}+sj-ij} = \sum_{\substack{0\leq j\leq r\\ \xi_{ij}\geq n}} (-1)^{\xi_{ij}+1} \binom{r}{j}_{qp} (qp)^{\frac{\xi_{ij}(\xi_{ij}-1)}{2}+sj-ij},$$

donde $\xi_{ij} := s + r - i - j$

Demostración. Por el lema anterior. □

Corolario 4.24. *Sean $r, s, i \geq 0$ con $0 \leq i \leq s$. Si $0 < r < n - s + i$, entonces*

$$\sum_{\substack{0\leq j\leq r\\ \xi_{ij}<n}} (-1)^{\xi_{ij}} \binom{r}{j}_{qp} (qp)^{\frac{\xi_{ij}(\xi_{ij}-1)}{2}+sj-ij} = 0.$$

Demostración. Por la Proposición 4.23. □

4. Ejemplos

En esta sección consideramos dos ejemplos particulares de las álgebras de Hopf trenzadas $H_{\mathcal{D}}$ definidas en el Corolario 4.7 y aplicamos los resultados obtenidos en este capítulo para determinar sus extensiones cleft.

4.1. Primer ejemplo

Consideremos el dato $\mathcal{D} = (C_2 \times C_2 \times C_2, \chi, z, \lambda, q)$, donde:

- $C_2 = \{1, g\}$ es el grupo multiplicativo de orden 2,
- $\chi\colon C_2 \times C_2 \times C_2 \longrightarrow \mathbb{C}$ es el caracter dado por $\chi(g^{i_1}, g^{i_2}, g^{i_3}) := (-1)^{i_1+i_2+i_3}$,
- $z := (g, g, g)$,
- $q = 1$ y $\lambda = 1$.

En este caso $p := \chi(z) = -1$, $n = 2$ y el álgebra de Hopf trenzada $H_{\mathcal{D}}$ del Corolario 4.7 es el álgebra generada por el grupo $G := C_2 \times C_2 \times C_2$ y un elemento x sujeto a las relaciones

$$x^2 = z^2 - 1 = 0 \quad \text{y} \quad x(g^{i_1}, g^{i_2}, g^{i_3}) = (-1)^{i_1+i_2+i_3}(g^{i_1}, g^{i_2}, g^{i_3})x,$$

provista con la estructura de álgebra de Hopf estándar con comultiplicación Δ, counidad ϵ y la antípoda S dada por

$$\begin{aligned} \Delta(\mathbf{g}) &:= \mathbf{g} \otimes \mathbf{g}, & \Delta(x) &:= 1 \otimes x + x \otimes z,\\ \epsilon(\mathbf{g}) &:= 1, & \epsilon(x) &:= 0\\ S(\mathbf{g}) &:= \mathbf{g}^{-1}, & S(\mathbf{g}x) &:= -xz^{-1}\mathbf{g}^{-1}, \end{aligned}$$

donde $\mathbf{g}$ denota un elemento arbitrario de G. Sea S_3 el grupo simétrico en $\{1, 2, 3\}$. Es fácil de verificar que $\mathrm{Aut}_{\chi,z}(G) \simeq S_3^{\mathrm{op}}$ (el automorfismo asociado a $\sigma \in S_3$ es la aplicación dada por $(g^{i_1}, g^{i_2}, g^{i_3}) \mapsto (g^{i_{\sigma(1)}}, g^{i_{\sigma(2)}}, g^{i_{\sigma(3)}})$.

4.1.1. $H_{\mathfrak{D}}$-espacios

Sea V un $\mathbb{C}$-espacio vectorial. Por la Proposición 4.11 sabemos que tener una estructura de $H_{\mathfrak{D}}$-espacio con espacio vectorial subyacente V es "lo mismo" que tener una graduación

$$V = \bigoplus_{\sigma\in S_3} V_\sigma$$

y un automorfismo $\alpha\colon V \to V$ tal que

$$\alpha(V_\sigma) = V_\sigma \quad \text{para todo } \sigma \in S_3.$$

La aplicación de estructura $s\colon H_{\mathfrak{D}} \otimes V \longrightarrow V \otimes H_{\mathfrak{D}}$ construida a partir de esos datos está dada por

$$s((g^{i_1}, g^{i_2}, g^{i_3}) \otimes v) := v \otimes (g^{i_{\sigma(1)}}, g^{i_{\sigma(2)}}, g^{i_{\sigma(3)}})$$

y

$$s((g^{i_1}, g^{i_2}, g^{i_3})x \otimes v) := \alpha(v) \otimes (g^{i_{\sigma(1)}}, g^{i_{\sigma(2)}}, g^{i_{\sigma(3)}})x$$

para cada $v \in V_\sigma$.

4.1.2. $H_{\mathfrak{D}}$-comódulos

Sea V un $\mathbb{C}$-espacio vectorial. Por el Corolario 4.13 las estructuras de $H_{\mathfrak{D}}$-comódulo a derecha (V, s) con espacio vectorial subyacente V están unívocamente determinadas por los siguientes datos:

(a) Una descomposición

$$V = \bigoplus_{(\mathbf{g},\sigma)\in G\times S_3^{\mathrm{op}}} V_{(\mathbf{g},\sigma)},$$

(b) Un automorfismo $\alpha\colon V \to V$ que cumple que $\alpha(V_{(\mathbf{g},\sigma)}) = V_{(\mathbf{g},\sigma)}$ para todo $(\mathbf{g}, \sigma)$,

(c) Una aplicación $U\colon V \to V$ tal que

$$U \circ \alpha = \alpha \circ U, \quad U^2 = 0 \quad \text{y} \quad U(V_{(\mathbf{g},\sigma)}) \subseteq V_{(\mathbf{g}z,\sigma)}$$

para todo $(\mathbf{g}, \sigma)$.

(Para las fórmulas de la transposición s de $H_{\mathfrak{D}}$ sobre V y la $H_{\mathfrak{D}}$-coacción a derecha ν véase el Corolario 4.13). Un procedimiento para construir ejemplos de espacios vectoriales $G \times \mathrm{Aut}_{\chi,z}$-graduados provistos de un automorfismo $\alpha\colon V \to V$ y una aplicación $U\colon V \to V$ que satisfaga las condiciones requeridas en los ítems (b) y (c) es el siguiente: primero tomemos un espacio vectorial V provisto de una descomposición en una suma directa de 48 subespacios $V_{(\mathbf{g},\sigma)}$ ($(\mathbf{g}, \sigma) \in G\times S_3^{\mathrm{op}}$); luego descompongamos cada espacio $V_{(\mathbf{g},\sigma)}$ como una suma directa

$$V_{(\mathbf{g},\sigma)} = V^0_{(\mathbf{g},\sigma)} \oplus V^1_{(\mathbf{g},\sigma)};$$

luego definamos U como la función nula en $V^0_{(\mathbf{g},\sigma)}$ y como una función inyectiva con imagen incluida en $V^0_{(\mathbf{g}z,\sigma)}$ sobre $V^1_{(\mathbf{g},\sigma)}$. Resta construir α. Puesto que $U\circ\alpha = \alpha\circ U$ y α es un automorfismo, la restricción de α a $V_{(\mathbf{g},\sigma)}$ necesariamente es de la forma

$$\alpha(v_0, v_1) = (\alpha^0_{(\mathbf{g},\sigma)}(v_0) + \alpha^{10}_{(\mathbf{g},\sigma)}(v_1), \alpha^1_{(\mathbf{g},\sigma)}(v_1)),$$

donde las funciones $\alpha^0_{(\mathbf{g},\sigma)}\colon V^0_{(\mathbf{g},\sigma)} \longrightarrow V^0_{(\mathbf{g},\sigma)}$ y $\alpha^1_{(\mathbf{g},\sigma)}\colon V^1_{(\mathbf{g},\sigma)} \longrightarrow V^1_{(\mathbf{g},\sigma)}$ son automorfismos y la función $\alpha^{10}_{(\mathbf{g},\sigma)}\colon V^1_{(\mathbf{g},\sigma)} \longrightarrow V^0_{(\mathbf{g},\sigma)}$ es un morfismo. Estas aplicaciones pueden construirse del siguiente modo: sea $\widetilde{V}^0_{(\mathbf{g},\sigma)} := U(V^1_{(\mathbf{g}z,\sigma)})$ y sea $\widetilde{U}_{(\mathbf{g}z,\sigma)}\colon V^1_{(\mathbf{g}z,\sigma)} \longrightarrow \widetilde{V}^0_{(\mathbf{g},\sigma)}$ el automorfismo inducido por U. Para cada $(\mathbf{g}, \sigma)$ tomemos un automorfismo arbitrario $\alpha^1_{(\mathbf{g},\sigma)}$ de $V^1_{(\mathbf{g},\sigma)}$; luego definamos la restricción $\alpha^0_{|\widetilde{V}^0_{(\mathbf{g},\sigma)}}\colon \widetilde{V}^0_{(\mathbf{g},\sigma)} \longrightarrow \widetilde{V}^0_{(\mathbf{g},\sigma)}$ de la función $\alpha^0_{(\mathbf{g},\sigma)}$ como la composición $\alpha^0_{|\widetilde{V}^0_{(\mathbf{g},\sigma)}} := \widetilde{U}_{(\mathbf{g}z,\sigma)}\circ\alpha^1_{(\mathbf{g}z,\sigma)}\circ\widetilde{U}^{-1}_{(\mathbf{g}z,\sigma)}$

(esto es forzado por la condición $U \circ \alpha = \alpha \circ U$); luego extendamos $\alpha^0_{|\widetilde{V}^0_{(\mathbf{g},\sigma)}}$ a un automorfismo $\alpha^0_{(\mathbf{g},\sigma)}$; finalmente tomemos $\alpha^{10}_{(\mathbf{g},\sigma)}$ como un automorfismo arbitrario.

Observación 4.25. *Por el Corolario 4.14 sabemos que* $V^{\operatorname{co} H_{\mathfrak{D}}} = V_{1_G} \cap \ker(U)$*, donde* $V_{1_G} = \bigoplus_{\sigma\in S_3} V_{1_G,\sigma}$.

Observación 4.26. *Estamos en el caso clásico, donde s es el flip, si y sólo si $V_{\mathbf{g},\sigma} = 0$ para $\sigma \neq \mathrm{id}$ y α es la función identidad. En este caso, la descomposition en el ítem a) antes mencionado tiene ocho sumandos, el ítem b) es trivial y la primera condición en el ítem c) también lo es.*

4.1.3. Transposiciones de $H_{\mathfrak{D}}$ sobre un álgebra

Por la Proposición 4.15, para cada $\mathbb{C}$-álgebra B, tener una transposición $s\colon H_{\mathfrak{D}}\otimes B \longrightarrow B\otimes H_{\mathfrak{D}}$ es equivalente a tener una graduación de álgebra

$$B = \bigoplus_{\sigma\in S_3^{\mathrm{op}}} B_\sigma$$

y un automorfismo de álgebras $\alpha\colon B \to B$ tal que $\alpha(B_\sigma) = B_\sigma$ para todo $\sigma \in S_3$.

4.1.4. $H_{\mathfrak{D}}$-comódulo álgebras a derecha

Por la discusión anterior a la Definición 4.16 sabemos que el grupo S_3^{op} acúa sobre G ($= G^{\mathrm{op}}$) vía $\sigma\cdot(g^{i_1}, g^{i_2}, g^{i_3}) := (g^{i_{\sigma(1)}}, g^{i_{\sigma(2)}}, g^{i_{\sigma(3)}})$. Consideremos el producto semidirecto $G(\chi, z) := G \ltimes S_3^{\mathrm{op}}$. Trabajaremos con el grupo $G(\chi, z)^{\mathrm{op}}$. Su conjunto subyacente es $C_2 \times C_2 \times C_2 \times S_3$ y el producto está dado por

$$(g^{i_1}, g^{i_2}, g^{i_3}, \sigma)(g^{j_1}, g^{j_2}, g^{j_3}, \tau) = (g^{j_1+i_{\tau(1)}}, g^{j_2+i_{\tau(2)}}, g^{j_3+i_{\tau(3)}}, \sigma \circ \tau).$$

Sea B una $\mathbb{C}$-álgebra. Por el Teorema 4.17 tener un $H_{\mathfrak{D}}$-comódulo álgebra a derecha (B, s) es equivalente a tener

(a) una $G(\chi, z)^{\mathrm{op}}$-graduación

$$B = \bigoplus_{(\mathbf{g},\sigma)\in G(\chi,z)^{\mathrm{op}}} B_{(\mathbf{g},\sigma)}$$

de B como álgebra,

(b) un automorfismo de álgebras $\alpha\colon B \to B$ tal que

$$\alpha\big(B_{(\mathbf{g},\sigma)}\big) \subseteq B_{(\mathbf{g},\sigma)} \quad \text{para todo } (\mathbf{g}, \sigma),$$

(c) una aplicación $U\colon B \to B$ tal que
- $U \circ \alpha = \alpha \circ U$,
- $U^2 = 0$,
- $U\big(B_{(\mathbf{g},\sigma)}\big) \subseteq B_{(\mathbf{g}z,\sigma)} \quad$ para todo $(\mathbf{g}, \sigma)$,
- la igualdad

$$U(bc) = bU(c) + (-1)^{i_1+i_2+i_3} U(b)\alpha(c)$$

es válida para todo $b \in B$ y $c \in B_{(g^{i_1},g^{i_2},g^{i_3})} := \bigoplus_{\sigma\in S_3} B_{(g^{i_1},g^{i_2},g^{i_3},\sigma)}$.

Observación 4.27. *Estamos en el caso clásico, donde s es el flip, si y sólo si $B_{\mathbf{g},\sigma} = 0$ para $\sigma \neq \mathrm{id}$ y α es la función identidad. En este caso, la graduación en el ítem (a) es una G-graduación, el ítem (b) es trivial, y el ítem (c) se simplifica considerablemente.*

4.1.5. Extensiones $H_{\mathcal{D}}$-cleft a derecha

Sea $C := B^{\mathrm{co}\, H_{\mathcal{D}}}$. Por el Corolario 4.14 sabemos que

$$C = B_{1_G} \cap \ker(U) = \bigoplus_{\sigma \in S_3} B_{(1_G,\sigma)} \cap \ker(U).$$

Por el Teorema 4.19 y el comentario que sigue a ese resultado, la extensión $(C \hookrightarrow B, s)$ es cleft si y sólo si existen $b_x \in B$ y una familia $(b_{\mathbf{g}})_{\mathbf{g} \in G}$ de elementos de $B^{\times}$,tales que

(a) $b_{1_G} = 1$,

(b) $b_{\mathbf{g}} \in B_{(\mathbf{g},\mathrm{id})} \cap \ker(U)$ para todo $\mathbf{g} \in G$,

(c) $b_x \in B_{(g,g,g,\mathrm{id})} \cap U^{-1}(1)$,

(d) $\alpha(b_x) = b_x$,

(e) $\alpha(b_{\mathbf{g}}) = b_{\mathbf{g}}$ para todo $\mathbf{g} \in G$.

Por el Teorema 4.19 sabemos que

1. B es un C-módulo libre a izquierda con base $\{b_g b_x^i : g \in G \text{ y } 0 \leq i \leq 1\}$.
2. La acción débil de $H_{\mathcal{D}}$ sobre C asociada con $\tilde{\gamma}$ de acuerdo al ítem (5) del Teorema 2.87 está dada por

$$(g^{i_1}, g^{i_2}, g^{i_3}) \rightharpoonup c = b_{(g^{i_1},g^{i_2},g^{i_3})} c b^{-1}_{(g^{i_{\sigma(1)}},g^{i_{\sigma(2)}} g^{i_{\sigma(3)}})}$$

y

$$(g^{i_1}, g^{i_2}, g^{i_3})x \rightharpoonup c = b_{(g^{i_1},g^{i_2},g^{i_3})} (b_x c - \alpha(c) b_x) b^{-1}_{(g^{i_{\sigma(1)}},g^{i_{\sigma(2)}},g^{i_{\sigma(3)}})(g,g,g)}$$

para $c \in B_{1_G,\sigma} \cap \ker(U)$.

3. El dos cociclo $\sigma \colon H_{\mathcal{D}} \otimes H_{\mathcal{D}} \to C$, asociado con $\tilde{\gamma}$ de acuerdo al ítem (5) del Teorema 2.87 está dado por

$$\begin{aligned} \sigma(\mathbf{g} \otimes \mathbf{h}) &= b_{\mathbf{g}} b_{\mathbf{h}} b^{-1}_{\mathbf{gh}}, \\ \sigma(\mathbf{g}x \otimes \mathbf{h}) &= -\chi(\mathbf{h}) b_{\mathbf{g}} b_{\mathbf{h}} b_x b^{-1}_{\mathbf{gh}(g,g,g)} + b_{\mathbf{g}} b_x b_{\mathbf{h}} b^{-1}_{\mathbf{gh}(g,g,g)}, \\ \sigma(\mathbf{g} \otimes \mathbf{h}x) &= 0 \end{aligned}$$

y

$$\sigma(\mathbf{g}x \otimes \mathbf{h}x) = \chi(h) b_{\mathbf{g}} b_{\mathbf{h}} b_x^2 b^{-1}_{\mathbf{gh}},$$

para $\mathbf{g}, \mathbf{h} \in G$.

4.2. Segundo ejemplo

Consideremos el dato $\mathcal{D} = (C_6, \chi, z, \lambda, q)$, donde:

- $C_6 = \{1, g, g^2, g^3, g^4, g^5\}$ es el grupo cíclico multiplicativo de orden 6,
- $\chi \colon C_6 \longrightarrow \mathbb{C}$ es el caracter dado por $\chi(g^i) := \xi^i$, donde ξ es una raíz de orden 3 de 1,
- $z := g$,
- $q = \xi$ y $\lambda = 1$.

En este caso $p := \chi(z) = \xi$, $n = 3$ y el álgebra de Hopf trenzada $H_{\mathcal{D}}$ del Corolario 4.7 es el álgebra generada por el grupo C_6 y un elemento x sujeto a las relaciones

$$x^3 = g^3 - 1 = 0 \quad \text{y} \quad xg = \xi g x,$$

provista de la estructura de álgebra de Hopf con comultiplicación Δ, counidad ϵ, antípoda S y trenza c_ξ dada por

$$
\begin{aligned}
&\Delta(g^i) := g^i \otimes g^i, && \Delta(x) := 1 \otimes x + x \otimes g,\\
&\epsilon(g^i) := 1, && \epsilon(x) := 0\\
&S(g^i x^j) := (-1)^j \xi^{j(j-1)} x^j g^{-j-i}, &&\\
&c_\xi(g^i x^j \otimes g^k x^l) = \xi^{jl} g^k x^l \otimes g^i x^j. &&
\end{aligned}
$$

Es claro que $\mathrm{Aut}_{\chi,z}(C_6) = \{\mathrm{id}\}$.

4.2.1. $H_{\mathfrak{D}}$-espacios

Sea V un $\mathbb{C}$-espacio vectorial. Por la Proposición 4.11 sabemos que tener una estructura de $H_{\mathfrak{D}}$-espacio con espacio vectoirial subyacente V es equivalente a tener un automorfismo $\alpha\colon V \to V$ tal que $\alpha^3 = \mathrm{id}$. La aplicación de estructura $s\colon H_{\mathfrak{D}} \otimes V \longrightarrow V \otimes H_{\mathfrak{D}}$ construida a partir de esos datos está dada por

$$s(g^i x^j \otimes v) := \alpha^j(v) \otimes g^i x^j.$$

4.2.2. $H_{\mathfrak{D}}$-comódulos

Sea V un $\mathbb{C}$-espacio vectorial. Por el Corolario 4.13 las estructuras de $H_{\mathfrak{D}}$-comódulo a derecha (V, s) con espacio vectorial subyacente V están unívocamente determinadas por los siguientes datos:

(a) una descomposición

$$V = \bigoplus_{g^i \in C_6} V_{g^i} = V_1 \oplus V_g \oplus V_{g^2} \oplus V_{g^3} \oplus V_{g^4} \oplus V_{g^5},$$

(b) un automorfismo $\alpha\colon V \to V$ que cumple que $\alpha^3 = \mathrm{id}$ y $\alpha(V_{g^i}) = V_{g^i}$ para todo i,

(c) una aplicación $U\colon V \to V$ tal que

$$U \circ \alpha = \xi\alpha \circ U, \quad U^3 = 0 \quad \text{y} \quad U(V_{g^i}) \subseteq V_{g^i g^{-1}} \quad \text{para todo } i.$$

(Para las fórmulas de la transposición s de $H_{\mathfrak{D}}$ sobre V y la $H_{\mathfrak{D}}$-coacción a derecha ν véase el Corolario 4.13).

4.2.3. Transposiciones de $H_{\mathfrak{D}}$ sobre un álgebra

Por la Proposición 4.15, para cada $\mathbb{C}$-álgebra B, tener una transposición $s\colon H_{\mathfrak{D}} \otimes B \longrightarrow B \otimes H_{\mathfrak{D}}$ es equivalente a tener un automorfismo de álgebras $\alpha\colon B \to B$ tal que $\alpha^3 = \mathrm{id}$.

4.2.4. $H_{\mathfrak{D}}$-comódulo álgebras a derecha

Sea B una $\mathbb{C}$-álgebra. Por el Teorema 4.17 tener un $H_{\mathfrak{D}}$-comódulo álgebra a derecha (B, s) es equivalente a tener

(a) una C_6-graduación

$$B = B_1 \oplus B_g \oplus B_{g^2} \oplus B_{g^3} \oplus B_{g^4} \oplus B_{g^5},$$

de B como espacio vectorial tal que $1_B \in B_1$,

(b) un automorfismo de álgebras $\alpha\colon B \to B$ tal que
$$\alpha^3 = \mathrm{id} \quad \text{y} \quad \alpha(B_{g^i}) \subseteq B_{g^i} \quad \text{para todo } i,$$
(c) una aplicación $U\colon B \to B$ tal que
- $U \circ \alpha = \alpha \circ U$,
- $U^3 = 0$,
- $U(B_{g^i}) \subseteq B_{g^{i-1}}$ para todo i,
- la igualdad
$$U(bc) = bU(c) + \xi^i U(b)\alpha(c)$$
es válida para todo $b \in B$ y $c \in B_{g^i}$,
- $B_{g^i}B_{g^j} \subseteq B_{g^{i+j}} \oplus B_{g^{i+j-3}}$ para todo i, j. Además, dados $b \in B_{g^i}$ y $c \in B_{g^j}$, el componente $(bc)_{g^{i+j-3}} \in B_{g^{i+j-3}}$ de bc está dado por
$$(bc)_{g^{i+j-3}} = \xi^j U(b)\alpha(U^2(c)) + \xi^{2j} U^2(b)\alpha^2(U(c)).$$

4.2.5. Extensiones $H_{\mathcal{D}}$-cleft a derecha

Sea $C := B^{\mathrm{co}\, H_{\mathcal{D}}}$.Por el Corolario 4.14 sabemos que
$$C = B_1 \cap \ker(U).$$
Por el Teorema 4.19 y el comentario que sigue a dicho resultado, la extensión $(C \hookrightarrow B, s)$ es cleft si y sólo si existen $b_x \in B$ y una familia $(b_{g^i})_{g^i \in C_6}$ de elementos de $B^\times$ tales que

(a) $b_1 = 1$,
(b) $b_{g^i} \in B_{g^i} \cap \ker(U)$ para todo $g^i \in C_6$,
(c) $b_x \in B_g \cap U^{-1}(1)$,
(d) $\alpha(b_x) = \xi b_x$,
(e) $\alpha(b_{g^i}) = b_{g^i}$ para todo $g^i \in C_6$.

Por el Teorema 4.19 sabemos que

1. B es un C-módulo libre a izquierda con base $\{b_{g^i}b_x^j : g^i \in C_6 \text{ y } 0 \le j \le 2\}$.
2. La acción débil de $H_{\mathcal{D}}$ sobre C asociada a $\tilde{\gamma}$ de acuerdo al ítem (5) del Teorema 2.87 está dada por
$$g^i \rightharpoonup c = b_{g^i} c b_{g^i}^{-1},$$
$$g^i x \rightharpoonup c = b_{g^i}(b_x c - \alpha(c) b_x) b_{g^{i+1}}^{-1},$$
y
$$\begin{aligned} g^i x^2 \rightharpoonup c &= b_{g^i}(b_x^2 c - (2)_{\xi^2} b_x \alpha(c) b_x + \alpha^2(c) b_x^2) b_{g^{i+2}}^{-1} \\ &= b_{g^i}(b_x^2 c + \xi b_x \alpha(c) b_x + \alpha^2(c) b_x^2) b_{g^{i+2}}^{-1} \end{aligned}$$
para $c \in C$.
3. El dos cociclo $\sigma\colon H_{\mathcal{D}} \otimes H_{\mathcal{D}} \to C$ asociado a $\tilde{\gamma}$ de acuerdo al ítem (5) del Teorema 2.87 está dado por
$$\sigma(g^i \otimes g^j) = b_{g^i} b_{g^j} b_{g^{i+j}}^{-1},$$
$$\sigma(g^i x \otimes g^j) = -\xi^j b_{g^i} b_{g^j} b_x b_{g^{i+j+1}}^{-1} + b_{g^i} b_x b_{g^j} b_{g^{i+j+1}}^{-1},$$
$$\sigma(g^i x^2 \otimes g^j) = \xi^{2j+2} b_{g^i} b_{g^j} b_x^2 b_{g^{i+j+2}}^{-1} + \xi^{j+1} b_{g^i} b_x b_{g^j} b_x b_{g^{i+j+2}}^{-1} + b_{g^i} b_x^2 b_{g^j} b_{g^{i+j+2}}^{-1},$$

$$\sigma(g^i \otimes g^j x) = 0,$$
$$\sigma(g^i x \otimes g^j x) = 0,$$
$$\sigma(g^i x^2 \otimes g^j x) = -\xi^{2j} b_{g^i} b_{g^j} b^{-1}_{g^{i+j+3}} - \xi^{2j} b_{g^i} b_{g^j} b^{-1}_{g^{i+j}} + \xi^{2j} b_{g^i} b_{g^j} b_x^3 b^{-1}_{g^{i+j+3}},$$
$$\sigma(g^i \otimes g^j x^2) = 0,$$
$$\sigma(g^i x \otimes g^j x^2) = -\xi^{j} b_{g^i} b_{g^j} b^{-1}_{g^{i+j+3}} - \xi^{j} b_{g^i} b_{g^j} b^{-1}_{g^{i+j}} + \xi^{j} b_{g^i} b_{g^j} b_x^3 b^{-1}_{g^{i+j+3}}$$

y

$$\begin{aligned}\sigma(g^i x^2 \otimes g^j x^2) = {} & -\xi^{2j+1} b_{g^i} b_{g^j} b_x b^{-1}_{g^{i+j+4}} - \xi^{2j+1} b_{g^i} b_{g^j} b_x b^{-1}_{g^{i+j+1}} + \xi^{j+1} b_{g^i} b_x b_{g^j} b^{-1}_{g^{i+j+4}} \\ & + \xi^{j+1} b_{g^i} b_x b_{g^j} b^{-1}_{g^{i+j+1}} + \xi^{2j+1} b_{g^i} b_{g^j} b_x^4 b^{-1}_{g^{i+j+4}} - \xi^{j+1} b_{g^i} b_x b_{g^j} b_x^3 b^{-1}_{g^{i+j+4}}.\end{aligned}$$

Bibliografía

[1] N. Andruskiewitsch and M. Graña, *Braided Hopf algebras over non-abelian finite groups*, Bol. Acad. Nac. Cienc. (Córdoba) **63** (1999), 45–78 (English, with English and Spanish summaries). Colloquium on Operator Algebras and Quantum Groups (Spanish) (Vaquerías, 1997). MR1714540 (2001b:16039)

[2] N. Andruskiewitsch and H.-J. Schneider, *Lifting of quantum linear spaces and pointed Hopf algebras of order p^3*, Journal of Algebra **209** (1998), no. 2, 658–691, DOI 10.1006/jabr.1998.7643. MR1659895 (99k:16075)

[3] R. J. Blattner, M. Cohen, and S. Montgomery, *Crossed products and inner actions of Hopf algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. **298** (1986), no. 2, 671–711, DOI 10.2307/2000643. MR860387 (87k:16012)

[4] R. J. Blattner and S. Montgomery, *Crossed products and Galois extensions of Hopf algebras*, Pacific J. Math. **137** (1989), no. 1, 37–54. MR983327 (90a:16007)

[5] T. Brzeziński, *Crossed products by a coalgebra*, Communications in Algebra **25** (1997), no. 11, 3551–3575, DOI 10.1080/00927879708826070. MR1468823 (98i:16034)

[6] A. Cap, H. Schichl, and J. Vanžura, *On twisted tensor products of algebras*, Communications in Algebra **23** (1995), no. 12, 4701–4735, DOI 10.1080/00927879508825496. MR1352565 (96k:16039)

[7] M. Cohen and D. Fishman, *Hopf algebra actions*, Journal of Algebra **100** (1986), no. 2, 363–379, DOI 10.1016/0021-8693(86)90082-7. MR840582 (87i:16012)

[8] M. Cohen, D. Fischman, and S. Montgomery, *Hopf Galois extensions, smash products, and Morita equivalence*, Journal of Algebra **133** (1990), no. 2, 351–372, DOI 10.1016/0021-8693(90)90274-R. MR1067411 (91i:16068)

[9] S. Dăscălescu, C. Năstăsescu, and Ş. Raianu, *Hopf algebras*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, vol. 235, Marcel Dekker Inc., New York, 2001. An introduction. MR1786197 (2001j:16056)

[10] M. Da Rocha, J. A. Guccione, and J. J. Guccione, *Braided module and comodule algebras, Galois extensions and elements of trace 1*, Journal of Algebra **307** (2007), no. 2, 727–768, DOI 10.1016/j.jalgebra.2006.05.008. MR2275370 (2007j:16064)

[11] C. Di Luigi, J. A. Guccione, and J. J. Guccione, *Brzeziński's crossed products and braided Hopf crossed products*, Communications in Algebra **32** (2004), no. 9, 3563–3580, DOI 10.1081/AGB-120039631. MR2097479 (2005i:16077)

[12] Y. Doi, *Hopf modules in Yetter-Drinfeld categories*, Communications in Algebra **26** (1998), no. 9, 3057–3070, DOI 10.1080/00927879808826327. MR1635910 (99h:16056)

[13] ______, *Equivalent crossed products for a Hopf algebra*, Communications in Algebra **17** (1989), no. 12, 3053–3085, DOI 10.1080/00927878908823895. MR1030610 (91k:16027)

[14] Y. Doi and M. Takeuchi, *Cleft comodule algebras for a bialgebra*, Communications in Algebra **14** (1986), no. 5, 801–817, DOI 10.1080/00927878608823337. MR834465 (87e:16025)

[15] C. Faith, *Algebra. I. Rings, modules, and categories*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 190, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1981. Corrected reprint. MR623254 (82g:16001)

[16] D. Fischman, S. Montgomery, and H.-J. Schneider, *Frobenius extensions of subalgebras of Hopf algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. **349** (1997), no. 12, 4857–4895, DOI 10.1090/S0002-9947-97-01814-X. MR1401518 (98c:16049)

[17] J. A. Guccione and J. J. Guccione, *A generalization of crossed products*, New trends in Hopf algebra theory (La Falda, 1999), Contemp. Math., vol. 267, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000, pp. 135–160, DOI 10.1090/conm/267/04268. MR1800710 (2002a:16035)

[18] ______, *Theory of braided Hopf crossed products*, Journal of Algebra **261** (2003), no. 1, 54–101, DOI 10.1016/S0021-8693(02)00546-X. MR1967157 (2004d:16054)

[19] L. Krop and D. E. Radford, *Finite-dimensional Hopf algebras of rank one in characteristic zero*, J. Algebra **302** (2006), no. 1, 214–230, DOI 10.1016/j.jalgebra.2006.03.031. MR2236601 (2008b:16064)

[20] H. F. Kreimer and M. Takeuchi, *Hopf algebras and Galois extensions of an algebra*, Indiana Univ. Math. J. **30** (1981), no. 5, 675–692, DOI 10.1512/iumj.1981.30.30052. MR625597 (83h:16015)

[21] R. G. Larson and M. E. Sweedler, *An associative orthogonal bilinear form for Hopf algebras*, Amer. J. Math. **91** (1969), 75–94. MR0240169 (39 #1523)

[22] V. V. Lyubashenko, *Hopf algebras and vector-symmetries*, Uspekhi Mat. Nauk **41** (1986), no. 5(251), 185–186 (Russian). MR878344 (88c:58007)

[23] V. Lyubashenko, *Modular transformations for tensor categories*, J. Pure Appl. Algebra **98** (1995), no. 3, 279–327, DOI 10.1016/0022-4049(94)00045-K. MR1324034 (96f:18010)

[24] S. Majid, *Cross products by braided groups and bosonization*, Journal of Algebra **163** (1994), no. 1, 165–190, DOI 10.1006/jabr.1994.1011. MR1257312 (94m:18009)

[25] A. Masuoka, *Cleft extensions for a Hopf algebra generated by a nearly primitive element*, Comm. Algebra **22** (1994), no. 11, 4537–4559, DOI 10.1080/00927879408825086. MR1284344 (96e:16049)

[26] S. Montgomery, *Hopf algebras and their actions on rings*, CBMS Regional Conference Series in Mathematics, vol. 82, Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC, 1993. MR1243637 (94i:16019)

[27] P. Schauenburg, *A generalization of Hopf crossed products*, Communications in Algebra **27** (1999), no. 10, 4779–4801, DOI 10.1080/00927879908826730. MR1709238 (2000i:16084)

[28] H. J. Schneider, *Normal basis and transitivity of crossed products for Hopf algebras*, Journal of Algebra **152** (1992), no. 2, 289–312, DOI 10.1016/0021-8693(92)90034-J. MR1194305 (93j:16032)

[29] D. Tambara, *The coendomorphism bialgebra of an algebra*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. **37** (1990), no. 2, 425–456. MR1071429 (91f:16048)

[30] M. Takeuchi, *Survey of braided Hopf algebras*, New trends in Hopf algebra theory (La Falda, 1999), Contemp. Math., vol. 267, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000, pp. 301–323, DOI 10.1090/conm/267/04277. MR1800719 (2002f:16091)

[31] ———, *Finite Hopf algebras in braided tensor categories*, J. Pure Appl. Algebra **138** (1999), no. 1, 59–82, DOI 10.1016/S0022-4049(97)00207-7. MR1685417 (2000f:16049)